KTH Matematik
B.Ek

Tentamen i 5B1204, DISKRET MATEMATIK för D
Fredagen den 26 augusti 2005

Skrivtid: 8.00 – 13.00
Examinator: Bengt Ek, tel 7906951.
Inga hjälpmedel tillåtna, inte ens räknedosa.

Betygsgränser (preliminära): 25 poäng ger betyg 3, 33 poäng ger betyg 4 och 42 poäng ger betyg 5.
Slutbetyget på kursen bestäms av betyget på skrivningen och betyget på uppsatsen.

Teoridel

Den som vt 2005 blivit godkänd på lappskrivning nr i får automatiskt 4 poäng på uppgift nr i (i=1,2,3,4,5), och skall inte göra den uppgiften.
Ange på skrivningsomslaget vilka lappskrivningar du klarat.

1a) (1p) Ange en (icke-trivial) homogen, linjär rekursionsekvation som löses av $a_n = 3n\,2^n$.
b) (1p) Vad menas med en **komponent** av en graf $G = (V, E)$?
c) (2p) Vad är summan av alla valenser, $\sum_{v\in V} \delta(v)$, i grafen $G = (V, E)$?

2a) (1p) Vad menas med **en transversal** för en familj mängder?
b) (1p) En **sammanhängande plan graf** har 127 hörn och 266 kanter. I hur många ytor delar grafen in planet (inklusive den obegränsade ytan)?
c) (2p) Vad menas med att en relation $\mathcal{R}$ på en mängd X är en **ekvivalensrelation**? Det skall framgå av svaret vad egenskaperna som krävs innebär, inte bara deras namn.

3a) (1p) Vad menas med att funktionen $f : X \to Y$ är en **surjektion**?
b) (1p) På hur många sätt kan man välja ut r st av n st olika kulor, utan hänsyn till ordningen? Svaret får innehålla fakulteter och de fyra räknesätten.
c) (2p) Permutationerna $\sigma = (153)(26)(4)$ och $\pi = (14)(2)(365)$ är givna i cykelnotation. Finns någon permutation τ så att $\sigma = \tau\pi\tau^{-1}$? Ange i så fall ett sådant τ i cykelnotation.

4a) (1p) Beräkna $\phi(539)$. ϕ är Eulers ϕ-funktion. $(539 = 7^2 \cdot 11)$
b) (1p) Vilket samband måste gälla mellan heltalen a och m för att det för alla $x, y \in \mathbb{Z}$ skall gälla att $ax \equiv ay \pmod{m} \Rightarrow x \equiv y \pmod{m}$?
c) (2p) Formulera **kinesiska restsatsen** (för heltal, som i kursen).

5a) (1p) Hur många olika (dvs icke-isomorfa) grupper av ordning 41 finns?
b) (1p) Vad innebär det att H är en **delgrupp** (eng. subgroup) till gruppen G?
c) (2p) För vilka värden på det naturliga talet n är $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$ en **ring** och för vilka är den en **kropp** (eng. field)?

Vänd!

Problemdel

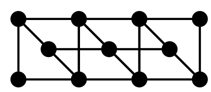
För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade.

6a) (2p) En linjär, binär kod ges av kontrollmatrisen (eng. check matrix) $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Vilka tre kodord har sänts, om orden (10011), (10111) och (11100) har mottagits och högst ett fel per ord har uppstått?
b) (2p) Finn ett naturligt tal n så att för alla heltal x, y sådana att $y \equiv x^{107} \pmod{1271}$, gäller att $y^n \equiv x \pmod{1271}$. $[1271 = 31 \cdot 41]$.
c) (2p) Låt $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ vara oändliga följder av 0:or och 1:or (som 01101000 . . .). Visa att det finns en följd $n_1 < n_2 < \ldots$, så att alla $\alpha_{n_i}, \alpha_{n_{i+1}}, \ldots$ är lika i de i första positionerna, dvs alla $\alpha_{n_1}, \alpha_{n_2}, \ldots$ börjar med samma symbol (0 eller 1), alla $\alpha_{n_2}, \alpha_{n_3}, \ldots$ börjar med samma två symboler (00,01,10 eller 11) etc.

7a) (2p) 17 stolar står på rad bredvid varandra. På hur många sätt kan 13 (särskiljbara) barn sätta sig på dem (med högst ett barn på varje stol)?
b) (2p) På hur många sätt går det om två av dem (Anna och Bo) inte får sitta på stolar intill varandra?
c) (2p) På hur många sätt går det om inga av Anna, Bo och Cecilia får sitta på stolar intill varandra?
[Svaren får innehålla fakulteter, potenser och de fyra räknesätten.]

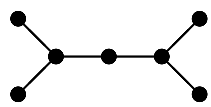
8a) (2p) Vad blir (den minsta positiva) resten då 13^{1066} divideras med 15?
b) (2p) Finn alla heltal x som uppfyller $25x \equiv 43 \pmod{63}$.
c) (2p) Låt A vara en mängd av 681 st heltal mellan 1 och 1000, dvs $A \subset \{1, 2, \ldots, 1000\}$, $|A| = 681$. Visa att det finns $a_1, a_2, a_3 \in A$ med $a_3 = a_2 + 10 = a_1 + 20$.

9a) (2p) I en graf med åtta hörn har sju av hörnen valenserna 1,3,3,4,5,6,7. Vilka värden är möjliga för det åttonde hörnets valens?
(Liksom i kursboken betraktar vi bara grafer utan loopar och multipla kanter.)
b) (2p) Har grafen till höger någon hamiltoncykel?
Ge exempel eller förklara varför ingen kan finnas.



c) (2p) En graf $G = (V, E)$ har 81 hörn, dvs $|V| = 81$, och 133 kanter, dvs $|E| = 133$. Om ingen cykel i grafen har längd (strikt) kortare än 5, kan G vara planär?

10a) (2p) Faktorisera $f(x) = x^4 + 2x^2 + x + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$ i irreducibla faktorer.
b) (2p) Sju pärlor är förbundna med trådar som i figuren. På hur många väsentligt olika sätt (dvs så att de inte blir lika hur man än vrider en del av eller hela anordningen i rummet) kan man färga precis en pärla röd och var och en av de övriga antingen svart eller vit?



c) (2p) Visa att i en ring $(R, +, \cdot)$ där $x \cdot x = x$ för alla $x \in R$, är $x + x = 0$ för alla $x \in R$.

Lycka till!

Lösningar läggs ut på kurssidan efter skrivningens slut.
Där meddelas också när tentan är rättad.