MATEMATISKA INSTITUTIONEN
KTH
Examinator: Svante Linusson
telefon 790 9444

Svar till Tenta A i 5B1204 DISKRET MATEMATIK för D
29 mars 2006

Max är 27 poäng och 13 räcker säkert för godkänt. Möjlighet att kompletera får den som har 12 poäng. Godkänt på lappskrivningarna 1-3 ger en bonuspoäng per styck.

Skrivtid: 8.00-13.00.
Hjälpmedel: Inga hjälpmedel tillåtna.
Motivera dina lösningar!!!

1. Formulera och bevisa en formel för antalet sätt att välja r objekt oordnat bland n möjliga då repetition är tillåten. (3 poäng)

   Svar: Se kursboken sidan 109.

2. Låt $G = (V, E)$ vara en sammanhängande planär graf. Formulera och visa (du får använda Eulers polyederformel i beviset) en olikhet mellan antalet noder och antalet kanter i G. Använd olikheten för att visa att K_5 inte är planär. (3 poäng)

   Svar: Se sidan 3 i stencilen "Om plana och planära grafer".

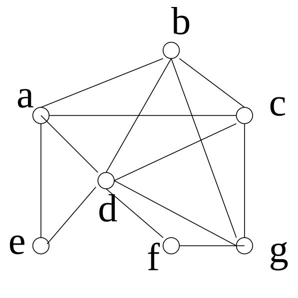
3. Hur många heltalslösningar finns det till

$$a + b + c + d = 17,$$

   om $a, b \geq 0$ och $c, d > 0$. (3 poäng)

   Svar: Sätt $c = c' + 1, d = d' + 1$. Vi får $17 = a + b + c + d = a + b + c' + d' + 2$, vilket är samma som $a + b + c' + d' = 15$, där $a, b, c', d' \geq 0$. Detta är samma sak som att välja oordnat 15 saker från 4 möjliga med repetition tillåten. Enligt känd formel blir det $\binom{15+4-1}{15} = \binom{18}{15}$.

4. Låt G vara följande graf.



   (a) Finns det en sluten (d.v.s. som börjar och slutar i samma nod) Eulerstig i G? (2 poäng)
   (b) Kanten $\{a, b\}$ är en matchning. Använd utökande stigar (alternating paths) för att hitta en största matching i G. (2 poäng)
   (c) Vad är kromatiska talet för G? (2 poäng)

   Svar:

   (a) Grafen är sammanhängande och alla noder har jämn valens så det finns en sådan stig enligt Eulers sats.

(b) Kan göras på många olika sätt. Ett exempel är att först ta utökande stig d, a, b, c som byter matchningen $M = \{ab\}$ mot $M' = \{ad, bc\}$. Sedan väljer man t.ex. utökande stig e, a, d, b, c, g som byter matchningen M' mot $M'' = \{ae, bd, cg\}$. Grafen G har 7 noder och M'' mättar 6 av dessa. Varje matchning mättar ett jämnt antal noder så ingen kan mätta fler än 6 noder i G. M'' är alltså en största matchning.

(c) Ett sätt att resonera är följande: Nod d har kant till alla andra noder och måste ha annan färg än alla andra noder. Tar man bort nod d och dess kanter får man en graf H med $\chi(H) = \chi(G) - 1$. Grafen H innehåller en triangel så $\chi(H) \geq 3$. Det är också lätt att direkt ange en färgning av H med tre färger, t.ex. a, g får färg 1, b, e får färg 2 och c, f får färg 3. Alltså är $\chi(H) = 3$ och följdaktligen $\chi(G) = 4$.

5. Hur många $\pi \in S_7$ uppfyller $\pi^3 = id$. (3 poäng)

Svar: Om π skall ha ordning 3 så måste den bara ha cykler vars längd är delbara med 3, d.v.s. 1 och 3. Möjliga cykeltyper är då $[1^7], [1^4 3]$ och $[1 3^2]$. Antalet permutationer med cykeltyp $[1^7]$ är 1 (endast identiteten), med cykeltyp $[1^4 3]$ är $\frac{7!}{1^4 3 \cdot 4! \cdot 1!} = 70$ och med cykeltyp $[1 3^2]$ är $\frac{7!}{1^1 3^2 \cdot 1! \cdot 2!} = 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 = 280$. Totalt 351.

6. Givet en graf G definiera en relation $\mathcal{R}$ på noderna i G, där $x\mathcal{R}y$ om x och y kan ha samma färg i en godkänd färgning av noderna i G. Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation om $G = K_{m,n}$ och beskriv partitionen av noderna som induceras av relationen. Rita en graf för vilken relationen $\mathcal{R}$ inte är en ekvivalensrelation och motivera varför den inte är det. (3 poäng)

Svar: Låt oss skriva nodmängden i $K_{m,n}$ som unionen av de båda färgklasserna $X \cup Y$, där $|X| = m$ och $|Y| = n$.
Reflexiv: $x\mathcal{R}x$ ty en nod kan ha samma färg som sig själv.
Symmetrisk: $x\mathcal{R}y \implies x, y$ kan ha samma färg i någon färgning av $K_{m,n} \implies y\mathcal{R}x$.
Transitiv: En nod i X kan aldrig ha samma färg som en nod i Y då alla noder i X har kant till alla noder i Y. Då $x\mathcal{R}y$ innebär att x och y kan ha samma färg i någon färgläggning av $K_{m,n}$ måste de följdaktligen ligga i samma färgklass (båda i X eller båda i Y).
$x\mathcal{R}y$ och $y\mathcal{R}z$ betyder då att $x, y, z \in X$ eller $x, y, z \in Y$. I båda fallen får vi $x\mathcal{R}z$. Relationen är transitiv på $K_{m,n}$ och alltså en ekvivalensrelation.

Om $x \in X$ får vi enligt resonemanget ovan att $x\mathcal{R}y$ omm $y \in X$. X är alltså en ekvivalensklass. På samma sätt får vi att Y är en ekvivalensklass.

Låt $G = (\{a, b, c\}, E)$ där E är den enda kanten ab. Färgningen som ger a, c färg 1 och b färg 2 visar att $a\mathcal{R}c$. Färgningen som ger b, c färg 1 och a färg 2 visar att $c\mathcal{R}b$. Men kanten ab hindrar alltid a och b från att ha samma färg så de kan inte vara relaterade.Detta visar att relationen $\mathcal{R}$ på G inte är transitiv och alltså ingen ekvivalensrelation.

7. Elva harar skulle dela en hög med maskrosblad som var färre än 1000 stycken. De delade i elva högar med lika många blad i varje hög och fick 3 blad över. Den minsta haren tog de 3 bladen och smet iväg. De blad som var kvar delades nu i tio lika stora högar och det blev 9 över. Den största haren tog dessa nio blad och två av högarna och gick iväg med dem. Slutligen delades de blad som var kvar i nio lika stora högar och det blev 3 blad över. De kvarvarande hararna tog var sin hög och skänkte de tre bladen till välgörande ändamål. Hur många blad var det från början? (3 poäng)

Svar: Låt x vara antalet maskrosblad från början. Vi får först veta att $x \equiv_{11} 3$. Vi får sedan veta att $x - 3 \equiv_{10} 9$, d.v.s. $x \equiv_{10} 2$. Den stora haren försvinner med 9 blad och två hela högar bland de tio, så sista villkoret i uppgiften ger att $(x - 3 - 9)\frac{8}{10} \equiv_9 3$. Detta ger att $(x - 12) \cdot 4 \equiv_9 3 \cdot 5 \equiv_9 6$ vilket är samma sak som $4x \equiv_9 6 + 48 = 54 \equiv_9 0$. Då 4 och 9 är relativt prima så följer att $x \equiv_9 0$. Vi kan nu lösa problemet med standardmetoden för kinesiska restsatsen, ty 11,10 och 9 är parvis relativt prima. Svaret är på formen $x = 3 \cdot b_1 \cdot 90 + 2 \cdot b_2 \cdot 99 + 0 \cdot b_3 \cdot 110$, där $90b_1 \equiv_{11} 1$, $99b_2 \equiv_{10} 1$ och $110b_3 \equiv_9 1$. Vi löser de två första av dessa och får med Euklides algoritm (eller provning) lösningarna $b_1 = 6$ och $b_2 = -1$. Följdaktligen får vi $x = 3 \cdot 6 \cdot 90 + 2 \cdot (-1) \cdot 99 = 1620 - 198 = 1422 \equiv_{990} 432$. Detta är den enda positiva lösningen mindre än 1000 så det är svaret.

8. Visa att $x^3 + 21y^2 + 5 = 0$ saknar heltalslösningar x, y. (Tips: räkna modulo lämpligt heltal) (3 poäng)

Svar: Räkna modulo 7. Vi får villkoret $x^3 + 5 \equiv_7 0$. Vi får följande tabell över möjliga värden modulo 7:

$x \pmod 7$	$x^3 \pmod 7$	$x^3 + 21y^2 + 5 \pmod 7$
0	0	5
1	1	6
2	1	6
3	-1	4
4	1	6
5	-1	4
6	-1	4

Varje heltalslösning är också en lösning modulo 7. Eftersom det enligt tabellen ovan saknas lösningar modulo 7 så finns det inga heltalslösningar alls.