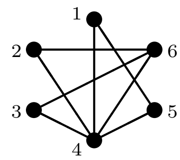
Matematik, KTH
B.Ek

Lösningar tentan SF1631 DISKRET MATEMATIK, D3,
20 oktober 2011
Tryckfel kan förekomma.

1) Vi skall avgöra om grafen har (a) en eulerväg och (b) en hamiltoncykel.

Lösning:
En eulerväg, dvs en väg som följer varje kant precis en gång, ges av 4-5-1-4-6-2-4-3-6 (det finns andra). Eftersom grafen har precis 2 udda hörn och är sammanhängande, ger en känd sats samma slutsats. Det finns ingen hamiltoncykel, dvs en cykel som skulle passera varje hörn precis en gång, ty en cykel som passerar hörnen 1 och 5 måste innehålla kanterna 45, 51, 14 och alltså passera hörn 4 flera gånger om den innehåller något mer hörn.



Svar: Grafen har en eulerväg, men ingen hamiltoncykel.

---

2) Vi söker heltalslösningar till (i) $111x + 84y = 15$ och (ii) $84x + 111y = 16$.

Lösning:
Euklides algoritm ger $111 = 1 \cdot 84 + 27$, $84 = 3 \cdot 27 + 3$, $27 = 9 \cdot 3 + 0$ så $\mathbf{sgd(111, 84) = 3}$ och $3 = 84 - 3 \cdot 27 = 84 - 3(111 - 84) = -3 \cdot 111 + 4 \cdot 84$.
För x och y heltal delar 3 talet $84x + 111y$ men inte 16, så ***(ii)* saknar heltalslösningar**.
$111 \cdot (-3) + 84 \cdot 4 = 3$, så $111 \cdot (-15) + 84 \cdot 20 = 15$ och $\begin{cases} x_0 = -15 \\ y_0 = 20 \end{cases}$ är en lösning till (i).
(x, y) uppfyller då (i) precis om $111(x - x_0) + 84(y - y_0) = 0$, dvs $37(x - x_0) = 28(y_0 - y)$, så (entydig faktorisering) $x - x_0 = 28k$, godtyckligt $k \in \mathbb{Z}$ och därur $y = y_0 - 37k$.

Svar: *(i)* har lösningarna $\begin{cases} \boldsymbol{x = -15 + 28k} \\ \boldsymbol{y = 20 - 37k} \end{cases}$, $\boldsymbol{k \in \mathbb{Z}}$**. *(ii)* saknar heltalslösningar.**

---

3) Vi söker (a) antalet "ord" som kan bildas med omkastning av bokstäverna i 'IRREDUCIBILITET' och (b) antalet om varken alla 'I' eller alla 'E' får stå tillsammans.

Lösning:
a) Positionerna i ordet skall fördelas bland 1 B, 1 C, 1 D, 2 E, 4 I, 1 L, 2 R, 2 T, 1 U. Detta kan göras på $\binom{15}{1,1,1,2,4,1,2,2,1} = \frac{15!}{2! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 2!}$ sätt.
b) Med X = mängden av alla ord i **a)**, A_E = mängden ord **med** alla 'E' tillsammans och A_I = mängden ord **med** alla 'I' tillsammans ger principen om inklusion och exklusion det sökta antalet: $|X \setminus (A_E \cup A_I)| = |X| - |A_E| - |A_I| + |A_E \cap A_I| = \binom{15}{1,1,1,2,4,1,2,2,1} - \binom{14}{1,1,1,1,4,1,2,2,1} - \binom{12}{1,1,1,2,1,1,2,2,1} + \binom{11}{1,1,1,1,1,1,2,2,1} = \frac{15!}{2! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 2!} - \frac{14!}{4! \cdot 2! \cdot 2!} - \frac{12!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} + \frac{11!}{2! \cdot 2!}$.

Svar a): $\boldsymbol{\frac{15!}{2! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 2!} (= 6810804000)}$ **ord,**
b): $\boldsymbol{\frac{15!}{2! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 2!} - \frac{14!}{4! \cdot 2! \cdot 2!} - \frac{12!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} + \frac{11!}{2! \cdot 2!} (= 5852800800)}$ **ord.**

---

4) G är en ändlig grupp och H, K delgrupper till G. Vi undersöker (a) om $H \cap K$ måste vara en delgrupp till G och, om $\text{sgd}(|H|, |K|) = 1$, vilka värden som är möjliga för (b) $|H \cap K|$ och (c) $|aH \cap bK|$ då $a, b \in G$.

Lösning:
$H \cap K \neq \varnothing$, ty $1 \in H, K$. $x, y \in H \cap K \Rightarrow x, y \in H, K \Rightarrow xy \in H, K \Rightarrow xy \in H \cap K$, så $H \cap K$ är en delgrupp till G, enligt en känd sats.
Om $g \in H \cap K$ gäller $g \in H, K$, så $o(g) \mid |H|, |K|$ och alltså $o(g) \mid \text{sgd}(|H|, |K|) = 1$, så $o(g) = 1$, dvs $g = 1$ och $|H \cap K| = 1$.
$aH \cap bK$ kan vara tom (t.ex. om $H = \{1\}$ och $a \notin bK$). Om $c \in aH \cap bK$ är $aH = cH$ och $bK = cK$, ty (vänster)sidoklasser är identiska eller disjunkta. Men $cH \cap cK = c(H \cap K) = \{c \cdot 1\} = \{c\}$ enligt ovan, så $|aH \cap bK| = 1$ i det fallet.

Svar a): Ja, $\boldsymbol{H \cap K}$ **är en delgrupp till** $\boldsymbol{G}$**, b):** $\boldsymbol{|H \cap K| = 1}$ **om** $\boldsymbol{\text{sgd}(|H|, |K|) = 1}$**,**
c): $\boldsymbol{|aH \cap bK|}$ **kan vara 0 eller 1 om** $\boldsymbol{\text{sgd}(|H|, |K|) = 1}$**.**

---

5) Vi skall faktorisera $p(x) = x^4 + 2x^3 + 4x + 3$ i $\mathbb{Z}_5[x]$ i irreducibla faktorer.

Lösning:
Vi börjar med att söka förstagradsfaktorer, vilket enligt faktorsatsen är ekvivalent med att finna nollställen till p. Man finner att $p(1) = 0$, så $x-1 = x+4$ är en faktor i $p(x)$. Polynomdivision ger att $p(x) = (x+4)q(x)$, där $q(x) = x^3+3x^2+3x+2$. Det gäller nu att faktorisera $q(x)$. Man finner att $q(3) = 0$, så $x - 3 = x + 2$ är en faktor i $q(x)$. Polynomdivision ger $q(x) = (x+2)r(x)$, där $r(x) = x^2 + x + 1$. Eftersom $r(x)$ saknar nollställen i $\mathbb{Z}_5$, saknar det förstagradsfaktorer och är alltså (eftersom det är ett andragradspolynom) irreducibelt.

Svar: Den sökta faktoriseringen är $\boldsymbol{(x + 2)(x + 4)(x^2 + x + 1)}$.

---

6) $G = (V, E)$ är plan och har två komponenter, båda med lika många hörn.
$|E| = 113$ och G:s ena komponent är ett träd, med lika många kanter som antalet områden den andra komponenten delar in planet i. Vi söker antalet hörn i G, dvs $|V|$.

Lösning:
Låt antalet hörn i varje komponent vara x (dvs $|V| = 2x$) och antalet kanter i den andra komponenten vara e. Den delar då in planet i $r = 2-x+e$ områden (Eulers polyederformel), vilket också är antalet kanter i den första komponenten (trädet), så $x = r + 1 = 3 - x + e$, dvs $2x - e = 3$. Totala antalet kanter, 113, är $e + r = e + 2 - x + e$, så $-x + 2e = 111$. Ekvationerna ger $3x = 2(2x - e) + (-x + 2e) = 2 \cdot 3 + 111 = 117$ och $x = 39$, $2x = 78$.

Svar: Totala antalet hörn i $\boldsymbol{G}$ är 78.

---

7) Vi söker (den minsta icke-negativa) resten då $20^{10^{2011}}$ divideras med 13.

Lösning:
$20^{10^{2011}} \equiv_{13} 7^{10^{2011}}$, ty $20 \equiv_{13} 7$, och enligt Fermats lilla sats är $7^{12} \equiv_{13} 1$, ty 13 är ett primtal och $13 \nmid 7$.
$10^{2011} \equiv_4 0$, ty $4 \mid 10^2$, dvs $4 \mid 10^{2011}$. $10 \equiv_3 1$ ger $10^{2011} \equiv_3 1^{2011} \equiv_3 1$ och $3 \mid 10^{2011} - 1$.
Således $3, 4 \mid 10^{2011} - 4$, dvs $10^{2011} \equiv_{12} 4$, $10^{2011} = 12k + 4$ för ett $k \in \mathbb{Z}$.
Alltså fås $20^{10^{2011}} \equiv_{13} 7^{12k+4} = (7^{12})^k \cdot 7^4 \equiv_{13} 1^k \cdot (7^2)^2 \equiv_{13} (-3)^2 = 9$.

Svar: Den minsta icke-negativa resten då $20^{10^{2011}}$ divideras med 13 är 9.

---

8) f_n är antalet ord av längd n i alfabetet $\{q, r, s, t, u\}$ med ett udda totalt antal av s, t, u.
Vi skall (a) visa $f_n = -f_{n-1}+3\cdot 5^{n-1}$ för $n = 1, \ldots$ och finna (b) f_0 och (c) f_n för $n = 1, \ldots$

Lösning:
f_n = antalet ord av längd n i alfabetet $\{q, r, s, t, u\}$ med ett udda antal s, t, u =
= (antalet sådana som slutar på q, r) + (antalet som slutar på s, t, u) =
= $2\times$ (antalet av längd $n - 1$, udda antal s, t, u) + $3\times$(d:o, jämnt antal s, t, u) =
= $2f_{n-1} + 3(5^{n-1} - f_{n-1}) = -f_{n-1} + 3 \cdot 5^{n-1}$ för $n = 1, 2, \ldots$ **saken (a) är klar**.
f_0 är antalet ord av längd 0 med ett udda antal s, t, u, dvs 0 **saken (b) är klar**.
Den homogena rekursionsekvationen $f_n = -f_{n-1}$ har karakteristisk ekvation $x = -1$, så $f_n^{hom} = c(-1)^n$. Ansatsen $A \cdot 5^n$ för en partikulärlösning ger $A \cdot 5^n = -A \cdot 5^{n-1} + 3 \cdot 5^{n-1}$, så $A = \frac{1}{2}$ och allmänna lösningen till rekursionsekvationen är $f_n = f_n^{hom} + f_n^{part} = c(-1)^n + \frac{1}{2} \cdot 5^n$. $f_0 = 0$ ger $c = -\frac{1}{2}$.

Svar b): $\boldsymbol{f_0 = 0}$, c): $\boldsymbol{f_n = \frac{5^n-(-1)^n}{2}}$ för $\boldsymbol{n = 0, 1, 2, \ldots}$.

---

9) Givet är $\alpha \in S_9$ med $\alpha(1) = 7, \alpha(2) = 9, \alpha(3) = 6, \alpha(4) = 5, \alpha(5) = 8, \alpha(6) = 3, \alpha(7) = 1, \alpha(8) = 2, \alpha(9) = 4$. Vi söker (a) α på cykelform, (b) ett $\beta \in S_9$ med $\alpha\beta = \beta\alpha^{-1}$ och (c) antalet sådana β.

Lösning:
α är i cykelform $(1\,7)(2\,9\,4\,5\,8)(3\,6)$ (ty $\alpha(1)=7$, $\alpha(7)=1$, $\alpha(2)=9\dots$), så α^{-1} är $(1\,7)(2\,8\,5\,4\,9)(3\,6)$. $\alpha\beta = \beta\alpha^{-1}$ ger att $\alpha = \beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$, dvs $(1\,7)(2\,9\,4\,5\,8)(3\,6)$ skall vara samma permutation som $\big(\beta(1)\,\beta(7)\big)\big(\beta(2)\,\beta(8)\,\beta(5)\,\beta(4)\,\beta(9)\big)\big(\beta(3)\,\beta(6)\big)$. β måste tydligen ta 5-cykel till 5-cykel och 2-cykel till 2-cykel, så $\beta(1)$ kan vara 1, 7, 3 eller 6. Då det valts är värdet för $\beta(7)$ bestämt (i samma 2-cykel) och $\beta(3)$ kan väljas på 2 sätt (i andra 2-cykeln), vilket bestämmer $\beta(6)$. P.s.s. kan (t.ex.) $\beta(2)$ väljas bland 2, 9, 4, 5 och 8. Då blir $\beta(8)\,\beta(5)\,\beta(4)$ och $\beta(9)$ bestämda, så totala antalet möjliga β är $4 \cdot 2 \cdot 5 = 40$.

**Svar a): $\boldsymbol{\alpha = (1\,7)(2\,9\,4\,5\,8)(3\,6)}$, b): Ett möjligt val är $\boldsymbol{\beta = (4\,5)(8\,9)}$,
c): Det finns 40 sådana $\boldsymbol{\beta}$.**

10a) På en kvadratisk bricka färgas kanterna vita eller svarta och hörnen blå, gröna eller röda. Vi söker antalet verkligt olika brickor.

Lösning:
Vi använder Burnsides lemma (Thm 21.4 i Biggs). Symmetrigruppen G har åtta element och är isomorf med $G_\square$, kvadratens symmetrigrupp. Med beteckningar från $G_\square$ har vi identiteten i, rotationer r, r^2, r^3 kring en axel vinkelrät mot brickan, rotationer x, xr^2 kring axlar parallella med brickans kanter och xr, xr^3 kring axlar längs diagonalerna. $|F(g)|$, antalet konfigurationer som inte ändras av g för de olika $g \in G$ blir:

g	antal element	$\lvert F(g)\rvert$
i	1	$3^4 \cdot 2^4 = 1296$ (alla hörn, kanter godtyckligt färgade)
r, r^3	2	$3 \cdot 2 = 6$ (alla hörn samma, alla kanter samma färg)
r^2	1	$3^2 \cdot 2^2 = 36$ (hörnen parvis, kanterna parvis samma färg)
x, xr^2	2	$3^2 \cdot 2^3 = 72$ (hörnen parvis, ett par kanter samma färg)
xr, xr^3	2	$3^3 \cdot 2^2 = 108$ (ett par hörn, kanterna parvis samma färg)

Så antalet olika brickor = antalet banor under G:s verkan på färgningarna =
$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|F(g)| = \frac{1}{8}(1\cdot 1296 + 2\cdot 6 + 1\cdot 36 + 2\cdot 72 + 2\cdot 108) = \frac{1}{8}\cdot 1704 = 213$.
Svar a): Man kan få 213 olika brickor.

---

b) F är en ändlig kropp av karakteristik p, ett primtal. Vi skall visa att $\varphi : F \to F$, given av $\varphi(x) = x^p$, är en isomorfi av F på sig själv.

Lösning:
Vi skall alltså visa att φ är en bijektion som bevarar F:s struktur, dvs $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ (ur de uppenbara värdena $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$ följer då också att $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$).
Eftersom multiplikationen i F är kommutativ gäller $\varphi(xy) = (xy)^p = x^p y^p = \varphi(x)\varphi(y)$. Som i en övning i Biggs bok fås $\varphi(x+y) = (x+y)^p = x^p + \dots + \binom{p}{k}x^{p-k}y^k + \dots + y^p = x^p + y^p = \varphi(x) + \varphi(y)$, ty eftersom p är ett primtal gäller $p \mid \binom{p}{k}$, så $\binom{p}{k}z = 0$ för alla $z \in F$ och alla $k = 1, \dots, p-1$.
Återstår att visa att φ är en bijektion. Eftersom $(F \setminus \{0\}, \times)$ är en grupp av ordning $p^r - 1$ (för något $r = 1, 2, \dots$) gäller $x^{p^r-1} = 1$ för alla $x \in F \setminus \{0\}$ och $x^{p^r} = x$ för alla $x \in F$. Det betyder att φ har en invers given av $\varphi^{-1}(x) = x^{p^{r-1}}$, så φ är en bijektion. **Saken är klar.**
