Matematik, KTH
B.Ek

Tentamen i kursen
SF1631, DISKRET MATEMATIK för D3
torsdagen den 20 oktober 2011, klockan 8.00–13.00

Examinator: Bengt Ek, tel 7906951.
Tillåtna hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

Högsta möjliga poäng på skrivningen är 47p. Till den läggs bonus från lappskrivningar ht 2011, högst 10p.

Betygsgränser:

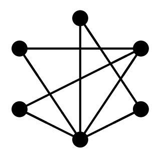
För betyg	A	B	C	D	E	
krävs	42	35	29	24	20	poäng (inklusive bonus)

16–19 poäng ger omdömet Fx, dvs rätt att delta i en komplettering för betyg E.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade. Satser från kursen får (utom då annat sägs) användas utan bevis, om det klart anges vad de säger.

DEL I

1a) (2p) Avgör om vidstående graf har någon eulerväg (eng. Eulerian walk). Ge exempel eller motivera varför ingen finns.
b) (2p) Samma uppgift för hamiltoncykel (eng. Hamiltonian cycle) i samma graf.



2) (4p) Finn alla heltalslösningar (x, y) till den av följande ekvationer som har sådana och förklara varför den andra saknar heltalslösningar.

$$(i) \quad 111x + 84y = 15 \qquad\qquad (ii) \quad 84x + 111y = 16$$

3a) (2p) Hur många olika ”ord” kan man bilda genom att kasta om bokstäverna i ordet ’IRREDUCIBILITET’?
b) (2p) Hur många blir det om varken alla ’I’ eller alla ’E’ får stå tillsammans?
Svaren får innehålla heltal, fakulteter, potenser och de fyra vanliga räknesätten.

4) Låt G vara en ändlig grupp och H, K vara delgrupper till G.
a) (1p) Måste $H \cap K$ vara en delgrupp till G?
b) (1p) Om $|H|$ och $|K|$ är relativt prima, dvs $\text{sgd}(|H|, |K|) = 1$, vilka värden är möjliga för $|H \cap K|$?
c) (2p) Om åter $\text{sgd}(|H|, |K|) = 1$ och a, $b \in G$, vilka värden är möjliga för $|aH \cap bK|$? aH och bK är som vanligt sidoklasser (eng. cosets) till H och K. Glöm inte att motivera dina svar.

5) (4p) Faktorisera polynomet $x^4 + 2x^3 + 4x + 3$ i $\mathbb{Z}_5[x]$ i irreducibla faktorer.

Vänd!

DEL II

6) (5p) En plan graf $G = (V, E)$ består av två komponenter, med lika många hörn (eng. vertices) i varje.
Totalt har G 113 kanter (eng. edges), dvs $|E| = 113$.
G:s ena komponent är ett träd, med lika många kanter som antalet områden den andra komponenten delar in planet i (inklusive det obegränsade området).
Hur många hörn innehåller G, dvs vad är $|V|$?
Det skall klart framgå av lösningen att det funna värdet på $|V|$ är det enda möjliga.

7) (5p) Vad blir (den minsta icke-negativa) resten då $20^{10^{2011}}$ (dvs $20^{(10^{2011})}$) divideras med 13?

8) Låt f_n för $n = 0, 1, 2, \ldots$ vara antalet ord av längd n i alfabetet $\{q, r, s, t, u\}$ med ett udda totalt antal av s, t, u.
a) (2p) Visa att f_n uppfyller

$$f_n = -f_{n-1} + 3 \cdot 5^{n-1} \quad \text{för } n = 1, 2, \ldots$$

b) (1p) Vad är f_0?
c) (2p) Bestäm (en ”formel” för) f_n för $n = 0, 1, \ldots$
(**c)** får lösas utan att **a)** har lösts.)

DEL III

För full poäng på dessa uppgifter krävs särskilt väl strukturerade och presenterade lösningar.

9) Permutationen $\alpha \in S_9$ (permutationerna av $\{1, 2, \ldots, 9\}$) ges av

$$\alpha(1) = 7,\ \alpha(2) = 9,\ \alpha(3) = 6,\ \alpha(4) = 5,$$
$$\alpha(5) = 8,\ \alpha(6) = 3,\ \alpha(7) = 1,\ \alpha(8) = 2,\ \alpha(9) = 4.$$

a) (1p) Skriv α på cykelform.
b) (2p) Finn ett $\beta \in S_9$ så att $\alpha\beta = \beta\alpha^{-1}$.
c) (2p) Hur många sådana β finns det?

10a) (4p) På en kvadratisk bricka med identisk över- och undersida färgas var och en av de fyra kanterna vit eller svart och vart och ett av de fyra hörnen blått, grönt eller rött. Hur många verkligt olika brickor (dvs brickor som inte blir lika hur man än vrider dem i rummet) kan man få?
b) (3p) Låt p vara ett primtal och F en ändlig kropp av karakteristik p (dvs $a + a + \cdots + a = 0$ (p st termer) för alla $a \in F$). Visa att $\varphi : F \to F$, given av $\varphi(x) = x^p$, är en isomorfi av F på sig själv (en s.k. automorfi).

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.
Där kommer så småningom också en kursenkät, fyll i den!