Matematik, KTH
B.Ek

Lösningar tentan TENA SF1630, SF1631 DISKRET MATEMATIK, F, D, 28 januari 2012

Tryckfel kan förekomma.

1) G är en hamiltonsk graf och vi skall visa att om man tar bort $k > 0$ hörn från G, får man en graf med högst k komponenter.

Lösning:
Betrakta en viss hamiltoncykel i G. Då man tar bort $k(> 0)$ hörn, delas cykeln upp i högst k sammanhängande delar (om man tar bort k bitar av en cirkel, har man högst k bitar kvar). Hörnen i varje del av den uppdelade cykeln ligger i samma komponent av den beskurna grafen och varje komponent av denna innehåller minst ett hörn, så antalet komponenter är högst k. **Saken är klar.**

---

2) Vi söker alla $x \in \mathbb{Z}_{246}$ som uppfyller $117x = 36$.

Lösning:
Problemet motsvarar den diofantiska ekvationen $117x - 246k = 36$. Euklides algoritm ger $246 = 2 \cdot 117 + 12$, $117 = 9 \cdot 12 + 9$, $12 = 1 \cdot 9 + 3$, $9 = 3 \cdot 3$ så $\mathbf{sgd(117, 246) = 3}$ och $3 = 12 - 1 \cdot 9 = 12 - 1(117 - 9 \cdot 12) = -1 \cdot 117 + 10 \cdot 12 = -117 + 10(246 - 2 \cdot 117) = 10 \cdot 246 - 21 \cdot 117 = 10 \cdot 246 - 39 \cdot 246 + 82 \cdot 117 - 21 \cdot 117 = -29 \cdot 246 + 61 \cdot 117$ $(39 = \frac{117}{3},\ 82 = \frac{246}{3})$.
Multiplikation med 12 ger $-348 \cdot 246 + 117 \cdot 732 = 36$, så $\begin{cases} x_0 = 732 \\ k_0 = 348 \end{cases}$ är en lösning till den diofantiska ekvationen.
(x, k) uppfyller då ekvationen precis om $117(x - x_0) - 246(k - k_0) = 0$, dvs $39(x - x_0) = 82(k - k_0)$, så (entydig faktorisering) $x - x_0 = 82q$, godtyckligt $q \in \mathbb{Z}$. $0 \le x < 246$ ger de tre värdena $x = 76, 158, 240$.

Svar: Alla lösningar i $\mathbb{Z}_{246}$ är $x = 76, 158, 240$.

---

3) Vi söker antalet sätt att fördela 30 (identiska) bullar och 15 (identiska) tårtbitar bland 20 (särskiljbara) barn, så att varje barn får minst en bulle och högst en tårtbit?

Lösning:
Bullarna kan fördelas på $\binom{19+10}{19} = \frac{29!}{19! \cdot 10!}$ sätt (först en bulle till varje barn, så väljs 19 väggar bland $19 + 10$ bullväggar).
Tårtbitarna kan fördelas på $\binom{20}{15} = \frac{20!}{15! \cdot 5!}$ sätt (välj vilka barn som får en).
Multiplikationsprincipen ger

Svar: De kan fördelas på $\frac{29! \cdot 20!}{19! \cdot 10! \cdot 15! \cdot 5!}$ (= 310545275040) sätt.

---

4) p är ett primtal och $n > 3$. Vi ska finna det största heltalet r så att $p^r \mid \binom{2n}{n}$ i fallen i) $\frac{2}{3}n \le p \le n$, ii) $n < p < 2n$.

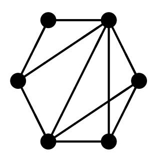
Lösning:
Om $\frac{2}{3}n \le p \le n$ gäller $p \le n < 2p \le 2n < 3p$ (inte $2n = 3p$, ty då vore p jämnt, alltså $p = 2$ och $n = 3$), så $p \mid n!$, $p^2 \nmid n!$ och $p^2 \mid (2n)!$, $p^3 \nmid (2n)!$, så $p \nmid \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} = \binom{2n}{n}$.
Om $n < p < 2n$ gäller $n < p < 2n < 2p$, så $p \nmid n!$ och $p \mid (2n)!$, $p^2 \nmid (2n)!$, så $p \mid \binom{2n}{n}$, $p^2 \nmid \binom{2n}{n}$.

Svar: i) $r = 0$, ii) $r = 1$.

---

5) Vi skall avgöra om det finns någon graf med sex hörn och valenser enligt i), ii) och iii).

Lösning:
i) 1,2,2,4,4,5 : **omöjligt**, ty hörnen med valenser 4,4,5 ger att alla valenser utom högst två måste vara minst 3.
ii) 2,3,3,3,4,5 : **möjligt**, se figuren till höger.
iii) 1,2,3,4,4,5 : **omöjligt**, ty summan av valenserna är 2 gånger antalet kanter, dvs ett jämnt tal.



---

6) m är ett udda heltal. Vi skall visa att $m \mid 2^n - 1$ för något av $n = 1, 2, \ldots, m$.

Lösning:
Om inget av talen $2^1 - 1, 2^2 - 1, \ldots, 2^m - 1$ vore delbart med m, skulle enligt postfacksprincipen minst två av dem, $2^s - 1$ och $2^t - 1$ med $1 \le s < t \le m$ säg, ge samma rest vid division med m (de möjliga resterna $1, 2, \ldots, m-1$ är postfacken, de m st talen är breven). Det skulle medföra att $m \mid (2^t - 1) - (2^s - 1) = 2^t - 2^s = 2^s(2^{t-s} - 1)$. Men m är ett udda tal, så det gåve att $m \mid 2^{t-s} - 1$ och eftersom $1 \le t - s < m$ motsäger det antagandet, så **saken är klar.**

---

7) $\alpha \in S_9$: $\alpha(1) = 3,\ \alpha(2) = 7,\ \alpha(3) = 1,\ \alpha(4) = 9,\ \alpha(5) = 8,\ \alpha(6) = 5,\ \alpha(7) = 4,\ \alpha(8) = 6,\ \alpha(9) = 2$. Vi söker a) α och α^{-1} på cykelform och b) ett $\sigma \in S_9$ så att $\sigma\alpha = \alpha^{-1}\sigma$.

Lösning:
$\alpha(1) = 3, \alpha(3) = 1$ ger en cykel $(1\,3)$, $\alpha(2) = 7, \alpha(7) = 4, \alpha(4) = 9, \alpha(9) = 2$ ger en cykel $(2\,7\,4\,9)$ och $\alpha(5) = 8, \alpha(8) = 6, \alpha(6) = 5$ ger en cykel $(5\,8\,6)$. Totalt $\alpha = (1\,3)(2\,7\,4\,9)(5\,8\,6)$ så $\alpha^{-1} = (3\,1)(9\,4\,7\,2)(6\,8\,5)$.
Att $\sigma\alpha = \alpha^{-1}\sigma$ är ekvivalent med $\sigma\alpha\sigma^{-1} = \alpha^{-1}$.
Men $\sigma\alpha\sigma^{-1} = (\sigma(1)\,\sigma(3))(\sigma(2)\,\sigma(7)\,\sigma(4)\,\sigma(9))(\sigma(5)\,\sigma(8)\,\sigma(6))$. Vi kan t.ex. välja $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 9, \sigma(3) = 1, \sigma(4) = 7, \sigma(5) = 6, \sigma(6) = 5, \sigma(7) = 4, \sigma(8) = 8, \sigma(9) = 2$, dvs i cykelform $\sigma = (1\,3)(2\,9)(4\,7)(5\,6)$.
Svar a: $\boldsymbol{\alpha = (1\,3)(2\,7\,4\,9)(5\,8\,6),\ \alpha^{-1} = (3\,1)(9\,4\,7\,2)(6\,8\,5),}$
b: (t.ex.) $\boldsymbol{\sigma = (1\,3)(2\,9)(4\,7)(5\,6).}$

---

8) G kan färgas med högst k färger på $P_G(k)$ sätt. På hur många sätt med exakt 5 färger?

Lösning:
Låt X vara mängden av färgningar med 5 givna färger (så $|X| = P_G(5)$) och $A_i, i = 1, 2, \ldots, 5$ mängden av färgningar med de 5 färgerna som inte använder färg nr i (så $|A_i| = P_G(4)$). Färgningarna som använder alla 5 färgerna är de som ligger i X men inte i någon av A_i:na. Det sökta antalet fås med sållprincipen:
$|X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_5)| = |X| - (|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_5|) + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \cdots + |A_4 \cap A_5|) - (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \cdots + |A_3 \cap A_4 \cap A_5|) + (|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5| + \cdots + |A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5|$.
Antalet termer $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_j}|$ med j olika A_i:n är $\binom{5}{j}$ och var och en av dem är antalet färgningar med högst $5 - j$ färger, dvs $P_G(5 - j)$, så antalet är
$P_G(5) - \binom{5}{1}P_G(4) + \binom{5}{2}P_G(3) - \binom{5}{3}P_G(2) + \binom{5}{4}P_G(1) - \binom{5}{5}P_G(0)$, dvs
Svar: $\boldsymbol{P_G(5) - 5P_G(4) + 10P_G(3) - 10P_G(2) + 5P_G(1) - P_G(0)}$

---

9) Kanterna i K_{17} har färgats med tre färger. Vi ska visa att det finns en enfärgad triangel.

Lösning:
Som i exemplet i Biggs 10.1, men "ett steg till".
Välj ett hörn, v_0 säg. Bland dess 16 kanter måste minst 6 ha samma färg, f_0 säg ("generaliserade postfacksprincipen", Biggs 10.1). Låt V' vara mängden av v_0:s "f_0-grannar". Om någon kant inom V' har färg f_0 ger den med två kanter till v_0 en enfärgad triangel. Annars, tag ett hörn v_1 i V', det har minst 5 grannar i V' och alla kanter till dessa har en av två färger. Det finns alltså minst tre kanter (inom V') från v_1 med samma färg, f_1 säg. Låt V'' vara mängden av v_1:s "f_1-grannar" i V'. Om någon kant inom V'' har färg f_1 ger den med två kanter till v_1 en enfärgad triangel, annars har alla kanter inom V'' samma färg, men $|V''| \ge 3$, så i alla fallen finns en enfärgad triangel. **Saken är klar.**

---

10) Vi skall visa att $\phi(mn)\phi(d) = d\phi(m)\phi(n)$, där ϕ är Eulers ϕ-funktion, om $d = \mathrm{sgd}(m, n)$.

Lösning:
Låt P_n vara mängden av primtal som delar n, dvs $P_n = \{p\ ;\ p \text{ primtal}, p \mid n\}$. Då är $P_{mn} = P_m \cup P_n$ och, om $d = \mathrm{sgd}(m, n)$, $P_d = P_m \cap P_n$. Enligt känd sats är $\phi(n) = n\prod_{p \in P_n}(1 - \frac{1}{p})$, så $\phi(mn)\phi(d) = mn\prod_{p \in P_{mn}}(1 - \frac{1}{p})\ d\prod_{p \in P_d}(1 - \frac{1}{p}) = dmn\prod_{p \in P_{mn}}(1 - \frac{1}{p})\prod_{p \in P_d}(1 - \frac{1}{p}) = dmn\prod_{p \in P_m}(1 - \frac{1}{p})\prod_{p \in P_n}(1 - \frac{1}{p}) = d\phi(m)\phi(n)$, ty varje p förekommer lika många gånger totalt i $P_m \cup P_n$ och $P_m \cap P_n$ som i P_m och P_n. **Saken är klar.**
