Matematik, KTH
B.Ek

Tentamen TENA (för äldre) i kurs
SF1630, SF1631, DISKRET MATEMATIK för F, D
lördagen den 28 januari 2012, klockan 9.00–14.00

OBS! Denna tentamen, TENA, är bara för första delen av kursen. Årets studenter och de som vill tentera hela kursen skall ha TEN1.

Examinator: Bengt Ek, tel 7906951.
Tillåtna hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa.

Högsta möjliga poäng på skrivningen är 47p. Till den läggs bonus från lappskrivningar ht 2011, högst 6p.

Betygsgränser:

För betyg	A	B	C	D	E	
krävs	42	35	29	24	20	poäng (inklusive bonus)

16–19 poäng ger omdömet Fx, dvs rätt att delta i en komplettering för betyg E.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade. Satser från kursen får (utom då annat sägs) användas utan bevis, om det klart anges vad de säger.

DEL I

1) (4p) Låt G vara en hamiltonsk graf, dvs en graf som har en hamiltoncykel. Visa att om man tar bort $k(=1,2,\dots)$ hörn (och alla vidhängande kanter) från G, får man en graf med högst k komponenter.

2) (4p) Finn alla x i $\mathbb{Z}_{246}$ som uppfyller

$$117x = 36 \quad (\text{i } \mathbb{Z}_{246}, \text{ förstås}).$$

3) (4p) 30 (identiska) bullar och 15 (identiska, men skilda från bullarna) tårtbitar skall fördelas bland 20 (särskiljbara) barn. På hur många sätt kan det ske om varje barn skall få minst en bulle och högst en tårtbit?
Svaret får innehålla heltal, fakulteter, potenser och de fyra vanliga räknesätten.

4) (4p) Låt p vara ett primtal och $n > 3$. Bestäm det största heltalet r så att $p^r \mid \binom{2n}{n}$ i de två fallen i) $\frac{2}{3}n \le p \le n$, ii) $n < p < 2n$.

5) (4p) Avgör (med motivering) i vart och ett av fallen i), ii) och iii) om det finns någon graf med sex hörn med valenser:
i) $1,2,2,4,4,5$, ii) $2,3,3,3,4,5$, iii) $1,2,3,4,4,5$.
(Liksom i kursboken betraktar vi bara grafer utan loopar och multipla kanter.)

Vänd!

DEL II

6) (5p) Låt m vara ett udda heltal. Visa att det för något av $n = 1, 2, \ldots, m$ gäller att $m \mid 2^n - 1$.

7) Permutationen $\alpha \in S_9$ ges av

$$\alpha(1) = 3,\ \alpha(2) = 7,\ \alpha(3) = 1,\ \alpha(4) = 9,$$
$$\alpha(5) = 8,\ \alpha(6) = 5,\ \alpha(7) = 4,\ \alpha(8) = 6,\ \alpha(9) = 2.$$

a) (2p) Skriv α och α^{-1} på cykelform.
b) (3p) Finn ett $\sigma \in S_9$ så att $\sigma\alpha = \alpha^{-1}\sigma$.

8) (5p) Låt $P_G(k)$ vara antalet sätt grafen G kan (hörn)färgas med **högst** k färger. På hur många sätt kan G färgas med **exakt** 5 färger, dvs så att alla 5 färgerna verkligen används?

DEL III

För full poäng på dessa uppgifter krävs särskilt väl strukturerade och presenterade lösningar.

9) (6p) Varje kant i K_{17}, den fullständiga (eng. complete) grafen med 17 hörn, ges en av tre färger. Visa att det finns en enfärgad triangel, dvs tre hörn vars tre inbördes kanter alla har samma färg.

10) (6p) Låt m, n vara naturliga tal med $d = \text{sgd}(m, n)$ (eng. $\text{gcd}(m, n)$). Visa att $\phi(mn)\phi(d) = d\phi(m)\phi(n)$, där ϕ är Eulers ϕ-funktion.

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.