Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning, 2004-11-12, kl. 08.00–13.00.

5B1206 Differentialekvationer I, för BMP.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

För godkänt betyg (3) krävs minst 4 av 5 moduler godkända (Del 1). För överbetyg krävs dessutom deltagande i Del 2. Lösningarna skall motiveras väl!

TENTAMENSSKRIVNING: DEL 1

1. [MODUL 1] Bestäm, på explicit form, alla lösningar till differentialekvationen

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + 4y + 3.$$

Av vilken ordning är differentialekvationen? Är den linjär eller autonom? Ifall den är autonom, rita ett fasdiagram med kritiska punkter. Finn även den lösning som har begynnelsevärde $y(0) = 0$, och beskriv var denna är definierad (finns det explosionspunkter?).

V.g. vänd!

Vi noterar att vi har an autonom differentialekvation. Först faktoriserar vi:

$$y^2 + 4y + 3 = (y+1)(y+3).$$

Därefter skriver vi om DE på formen

$$\frac{dy}{(y+1)(y+3)} = dx,$$

och integrerar båda sidor:

$$\int \frac{dy}{(y+1)(y+3)} = \int dx.$$

Partialbråksuppdelning ger

$$\frac{1}{(y+1)(y+3)} = \frac{1/2}{y+1} - \frac{1/2}{y+3},$$

och därför får vi av ovanstående

$$\frac{1}{2}\log|y+1| - \frac{1}{2}\log|y+3| = x + C_1,$$

vilket vi skriver om som

$$\log\left|\frac{y+1}{y+3}\right| = 2x + C_2,$$

med $C_2 = 2C_1$. Detta blir

$$\left|\frac{y+1}{y+3}\right| = C_3\, e^{2x},$$

där $C_3 = e^{C_2}$, dvs

$$\frac{y+1}{y+3} = C_4\, e^{2x},$$

med en reell konstant C_4 vars absolutbelopp är C_3. Vi får lösningen explicit:

$$y = \frac{3C_4\, e^{2x} - 1}{1 - C_4\, e^{2x}}.$$

Lösningen med $y(0) = 0$ blir, med $C_4 = \frac{1}{3}$,

$$y = \frac{e^{2x} - 1}{1 - \frac{1}{3}\, e^{2x}}.$$

Lösningen blir definierad fram till dess att vi dividerar med noll, vilket innebär att lösningens definitionsintervall blir

$$-\infty < x < \frac{1}{2}\ln 3.$$

Vi får “explosion” i högra randpunkten.

---

2. [MODUL 2] Kan funktionerna

$$y_1(x) = e^x, \qquad y_2(x) = \sin x,$$

vara lösningar till en differentialekvation av formen

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = 0,$$

där $P(x)$ och $Q(x)$ är kontinuerliga och reellvärda på intervallet $0 < x < \pi/2$?

Vi beräknar först Wronskianen för y_1, y_2:

$$W = W(x) = \det \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} e^x & \sin x \\ e^x & \cos x \end{bmatrix} = e^x\big(\cos x - \sin x\big).$$

Vi vet enligt sats i läroboken att om y_1, y_2 löser en differentialekvation av den beskrivna typen, så måste antingen Wronskianen vara identiskt noll eller nollskild i varje punkt på det givna intervallet $0 < x < \pi/2$. Men $\cos x = \sin x$ gäller ju för $x = \pi/4$, men inte i, exempelvis, $x = \pi/3$. Detta innebär att $W = 0$ i $x = \pi/4$, medan $W \neq 0$ i $x = \pi/3$. Således kan y_1, y_2 *inte* vara lösningar till en och samma differentialekvation av den givna typen på intervallet $0 < x < \pi/2$.

---

3. [MODUL 3] Vilken funktion (eller distribution) har Laplace-transformen

$$\frac{s^2+9}{s^2-9}\,e^{-s} \quad ?$$

Vi gör först polynomdivision, samt partialbråksuppdelning:

$$\frac{s^2+9}{s^2-9} = 1 + \frac{3}{s-3} - \frac{3}{s+3}.$$

Den funktion som har denna Laplace-transform är "funktionen"

$$g(t) = \delta_0(t) + 3\,e^{3t} - 3\,e^{-3t}, \qquad (t > 0)$$

där δ_0 betecknar delta-funktionen med massa i origo. Att multiplicera med e^{-s} är samma som att translatera till höger en enhet och ersätta funktionen till vänster om 1 med noll, dvs den funktion som har den givna Laplacetransformen är

$$f(t) = \delta_1(t) + 3\,H(t-1)\,e^{3(t-1)} - 3\,H(t-1)\,e^{-3(t-1)},$$

där δ_1 betecknar delta-funktionen med massa i 1, samt H är den s k Heaviside-funktionen (ibland betecknad med $\mathcal{U}$).

V.g. vänd!

4. [MODUL 4] Bestäm de kritiska punkterna till det autonoma systemet

$$\begin{cases} x' = 2\,y, \\ y' = -2\,x\,e^x - 2\,y\,\cos x. \end{cases}$$

Skriv upp det lineariserade systemet kring varje kritisk punkt på matrisform, och lös dessa lineariserade problem fullständigt; rita dessutom ett fasporträtt med flödeslinjer (banor). Avgör slutligen om det ursprungliga problemet är asymptotiskt stabilt eller ej.

Vi bestämmer först de kritiska punkterna; dessa fås ur ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2\,y = 0, \\ -2\,x\,e^x - 2\,y\,\cos x = 0. \end{cases}$$

Vi inser snabbt att den enda lösningen är $x = y = 0$, dvs den enda kritiska punkten är $(0, 0)$. Lineariseringen i $(0, 0)$ av $2y$ är förstås $2y$, medan lineariseringen av

$$-2\,x\,e^x - 2\,y\,\cos x$$

blir

$$-2x - 2y.$$

Det lineariserade systemet blir således

$$\begin{cases} x' = 2\,y, \\ y' = -2\,x - 2\,y. \end{cases}$$

På matrisform blir det

$$X = AX, \qquad \text{där} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vi får sår och determinant för A:

$$\tau = -2, \qquad \Delta = 4.$$

Detta betyder att egenvärdena till A ges av

$$\lambda_1 = -1 + i\sqrt{3}, \qquad \lambda_2 = -1 - i\sqrt{3}.$$

Vi har alltså komplexa egenvŕden, med negativ realdel. Enligt teorin innebär detta att fasdiagrammet blir en stabil spiral (vilken ej kan ritas inom detta datorsystem). För att avgöra rotationsriktningen, tittar vi på en punkt längs med positiva y-axeln, och ser att x växer och y avtar där. Gör vi motsvarande analys av negativa y-axeln, samt positivs och negativa x-axeln, ser vi att om vi gå i positiv tidsriktning går spiralen medurs.

För att lösa det lineariserade systemet, behöver vi egenvektorer till egenvärdena. Dessa löses ut enligt standard-metod frå Linjär Algebra; resultatet är

$$K_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, \qquad K_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Vi skriver $K_1 = B_1 + iB_2$ och $K_2 = B_1 - iB_2$, med B_1 och B_2 reella,

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Vi får nu enligt recept i läroboken två reellvärda lösningar,

$$\begin{aligned} X_1 &= \Big[B_1 \cos\big(\sqrt{3}t\big) - B_2 \sin\big(\sqrt{3}t\big)\Big]\, e^{-t}, \\ X_2 &= \Big[B_2 \cos\big(\sqrt{3}t\big) + B_1 \sin\big(\sqrt{3}t\big)\Big]\, e^{-t}. \end{aligned}$$

Den allmänna lösningen till den lineariserade systemet blir således

$$X = c_1\, X_1 + c_2\, X_2 = \begin{pmatrix} 2c_1 \\ -c_1 + c_2\sqrt{3} \end{pmatrix} e^{-t}\, \cos\big(\sqrt{3}t\big) + \begin{pmatrix} 2c_2 \\ -c_2 - c_1\sqrt{3} \end{pmatrix} e^{-t}\, \sin\big(\sqrt{3}t\big).$$

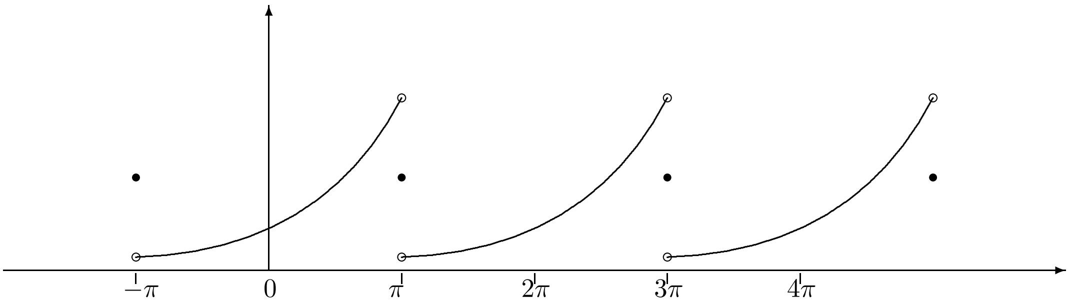
Eftersom det lineariserade systemet är asymptotiskt stabilt i (0,0), gäller detsamma för det ursprungliga olinjära systemet.

---

5. [MODUL 5] Låt $f(x) = e^x$ för x i intervallet $-\pi < x < \pi$. Beräkna Fourierserien för denna funktion (2π-periodisk Fourierserie). Rita sedan upp grafen för Fourierserien på intervallet $[-3\pi, 5\pi]$.

Vi ritar grafen på ett litet mindre intervall, men tror ni hänger med ändå. Ritprogrammet har sina begränsningar, men huvuddragen skall i alla fall synas.

V.g. vänd!



Funktionens komplexa Fourierkoefficienter blir

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x\, e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x}\, dx = (-1)^n\, \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}\, \frac{1}{1-in}$$

för varje heltal n. Vi får alltså den komplexa Fourierserieutvecklingen

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1-in}\, e^{inx}.$$

Genom att använda att $e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$ så får vi representationen

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx),$$

där

$$a_n = \frac{(-1)^n(e^{\pi}-e^{-\pi})}{\pi(1+n^2)}, \qquad b_n = \frac{(-1)^{n-1}(e^{\pi}-e^{-\pi})\, n}{\pi(1+n^2)}.$$