Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning, 2004-11-12, kl. 08.00–13.00.

5B1206 Differentialekvationer I, för BMP.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

För betyg 4 krävs 10 poäng, medan för betyg 5 krävs 15 poäng. Lösningarna skall motiveras väl!

TENTAMENSSKRIVNING: DEL 2

1. Låt T vara temperaturen på ett stycke glasmassa som tas ur en glödande ugn, vilken håller 1000 grader Celsius. Glasmästaren vet, att glasmassan är mjuk och formbar så länge som temperaturen inte understiger 550 grader Celsius. Han observerar att efter en minut har glaset antagit en svagt rosa färg, vilket han av erfarenhet vet betyder att temperaturen sjunkit till 820 grader. Hur länge kan glasblåsaren fortsätta att bearbeta glasmassan? Vi antar att den omgivande luftens temperatur är 30 grader. (5)

Enligt Newtons avkylningslag gäller

$$T' = -k(T - T_m),$$

så att

$$T = T_m + C\,e^{-kt},$$

där $T_m = 30$ är omgivningens temperatur, medan C och k är konstanter som skall bestämmas. Vid tiden $t = 0$ är $T = 1000$, så att $C = 1000 - 30 = 970$. Vi räknar tiden i minuter. Vi vet att då $t = 1$, gäller att $T = 820$. Detta ger ekvationen

$$820 = 30 + 970\,e^{-k},$$

och k är därför

$$k = \ln \frac{97}{79}.$$

Det frågas efter när den kritiska temperaturen 550 grader passeras. Detta motsvarar att leta efter t så att

$$550 = 30 + 970\,e^{-kt},$$

vilket ger tiden

$$t = \frac{1}{k} \ln \frac{970}{520} = \frac{\ln \frac{97}{52}}{\ln \frac{97}{79}} \approx 3.04 \text{ min.}$$

V.g. vänd!

2. Bestäm en funktion f som satisfierar ekvationen

$$f(t) = e^{2t} + \int_0^t f(t-\tau)\,\sin\tau\,d\tau$$

på intervallet $[0, +\infty[$. (5)

Vi inser att integralen på höger sida är en faltning. Samtidigt drar vi oss till minnes att Laplace-transformen av en faltning blir en vanlig produkt. Laplace-transformen av $\sin t$ är enligt BETA

$$\frac{1}{s^2+1}.$$

Ekvationen ovan lyder – efter Laplace-transformering –

$$\widetilde{f}(s) = \frac{1}{s-2} + \frac{\widetilde{f}(s)}{s^2+1}.$$

Detta skriver vi om som

$$\widetilde{f}(s)\left[1 - \frac{1}{s^2+1}\right] = \frac{1}{s-2},$$

och får lösningen

$$\widetilde{f}(s) = \frac{s^2+1}{s^2(s-2)} = \frac{5/4}{s-2} - \frac{1/4}{s} - \frac{1/2}{s^2}$$

Invers Laplace-transformering ger nu att

$$f(t) = \frac{5}{4}\,e^{2t} - \frac{1}{4} - \frac{t}{2}.$$

---

3. Lös fullständligt systemet (t betecknar den oberoende variabeln)

$$\begin{cases} x' = x + y + t, \\ y' = x - \alpha\,y, \end{cases}$$

där α betecknar en reell parameter. Bestäm därvid även den lösning som har begynnelsedata $x(0) = y(0) = 0$, samt avgör dess beteende då tiden $t \to +\infty$. (5)

Vi skriver om systemet på vektorform:

$$X' = AX + B, \qquad \text{där} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi löser först det homogena problemet $X' = AX$. Matrisen A har spår och determinant:

$$\tau = 1 - \alpha, \qquad \Delta = -\alpha - 1.$$

Detta innebär att egenvärdena till A ges av

$$\lambda_1 = \frac{1-\alpha}{2} + \sqrt{\frac{(1-\alpha)^2}{4} + \alpha + 1}, \qquad \lambda_2 = \frac{1-\alpha}{2} - \sqrt{\frac{(1-\alpha)^2}{4} + \alpha + 1}.$$

Vi skriver om uttrycket innanför rottecknet,

$$\frac{(1-\alpha)^2}{4} + \alpha + 1 = \frac{(1+\alpha)^2}{4} + 1,$$

så att

$$\lambda_1 = \frac{1-\alpha}{2} + \sqrt{\frac{(1+\alpha)^2}{4} + 1}, \qquad \lambda_2 = \frac{1-\alpha}{2} - \sqrt{\frac{(1+\alpha)^2}{4} + 1}.$$

Uttrycket under rottecknet är alltid positivt, så vi får aldrig komplexa egenvärden.

Vi får motsvarande egenvektorer

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 - 1 \end{pmatrix}, \qquad K_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Detta innebär att den allmänna homogena lösningen är

$$\begin{aligned} X_h = c_1\, X_1 + c_2\, X_2 = c_1\, K_1\, e^{\lambda_1 t} + c_2\, K_2\, e^{\lambda_2 t} \\ = \begin{pmatrix} c_1\, e^{\lambda_1 t} + c_2\, e^{\lambda_2 t} \\ c_1\,(\lambda_1 - 1)\, e^{\lambda_1 t} + c_2\,(\lambda_2 - 1)\, e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vi behöver nu en partikulärlösning. För $\alpha \neq -1$ ges en av

$$X_p = \frac{t}{\alpha + 1} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{(\alpha+1)^2} \begin{pmatrix} \alpha^2 + 1 \\ \alpha - 1 \end{pmatrix}.$$

För $\alpha = -1$ får vi ta till polynom av grad 2 istället. Vi lämnar detta fall till den ambitiöse eleven. Notera att lösninen divergerar mot oändligheten, omväl i olika takt, oberoende av α, åtminstone för $\alpha \neq -1$.

V.g. vänd!

4. Betrakta värmeledningsekvationen

$$9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) - \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = 0, \qquad (0 < x < \pi,\ \ t > 0)$$

med randvillkor

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 1, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(t,\pi) = 1, \qquad (t > 0).$$

Begynnelsedata är

$$u(0,x) = \cos(5x) + x, \qquad (0 < x < \pi).$$

Finn den funktion $u(t,x)$ som löser ovanstående värmeledningsproblem. (5)

Vi vill först hitta en lämplig linjär funktion som gör randvillkoren homogena. Funktionen

$$L(x) = x$$

löser värmeledningsekvationen, samt har $L'(x) = 1$ överallt. Vi betraktar således funktionen v istället,

$$v(t,x) = u(t,x) - L(x),$$

vilken löser

$$9\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x) - \frac{\partial v}{\partial t}(t,x) = 0, \qquad (0 < x < \pi,\ \ t > 0)$$

med randvillkor

$$\frac{\partial v}{\partial x}(t,0) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(t,\pi) = 0, \qquad (t > 0),$$

samt begynnelsedata

$$v(0,x) = \cos(5x), \qquad (0 < x < \pi).$$

Vi vet från variabelseparationsmetoden att v skall vara på formen

$$v(t,x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\, e^{-9n^2 t} \cos(nx),$$

för lämpligt val av koefficienter c_n. Insättning i begynnelsevillkoret ger

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cos(nx) = \cos(5x),$$

så att $c_n = 0$ för $n \neq 5$ och $c_5 = 1$. Vi får härur att

$$v(t,x) = e^{-1125\,t} \cos(5x),$$

så svaret blir

$$u(t,x) = x + e^{-1125\,t} \cos(5x).$$