Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning, 2004-11-20, kl. 09.00–14.00.

5B1206 Differentialekvationer I, för BMP.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

För godkänt betyg (3) krävs minst 4 av 5 moduler godkända (Del 1 eller 3). För överbetyg krävs dessutom deltagande i Del 2. Lösningarna skall motiveras väl!

TENTAMENSSKRIVNING: DEL 3

1. [MODUL 1] Bestäm, på explicit form, alla lösningar till differentialekvationen

$$\frac{dy}{dx} = e^y.$$

Av vilken ordning är differentialekvationen? Är den linjär eller autonom? Ifall den är autonom, rita ett fasdiagram med kritiska punkter. Finn även den lösning som har begynnelsevärde $y(0) = 0$, och beskriv var denna är definierad (finns det explosions-punkter?).

Ett endimensionellt fasdiagram kan ritas: vi får inga kritiska punkter, och bara pilar riktade åt höger.Ekvationen är autonom och av första ordningen. Vi fortsätter nu med att lösa ekvationen. Vi skriver ekvationen på formen

$$e^{-y}\,dy = dx.$$

Nästa steg är att integrera båda sidor:

$$-e^{-y} = x + C_1,$$

vilket vi skriver om som

$$e^{-y} = -x + C_2,$$

med $C_2 = -C_1$. Vi logaritmerar bägge sidor, och löser ut y:

$$y = -\log(-x + C_2).$$

Nu betraktar vi lösningen med $y(0) = 0$. Då måste konstanten vara $C_1 = 1$, och vi har

$$y = -\log(1 - x).$$

Denna är definierad på intervallet $-\infty < x < 1$, och vi får singularitet i $x = 1$ (explosionspunkt).

V.g. vänd!

2. [MODUL 2] Kan funktionerna

$$y_1(x) = e^x, \qquad y_2(x) = \sin x,$$

vara lösningar till en differentialekvation av formen

$$y'' + P(x)\, y' + Q(x)\, y = 0,$$

där $P(x)$ och $Q(x)$ är kontinuerliga och reellvärda på intervallet $0 < x < \pi/5$?

Vi stoppar in funktionerna i differentialekvationen:

$$e^x + P(x)\, e^x + Q(x)\, e^x = 0, \qquad -\sin x + P(x)\, \cos x + Q(x)\, \sin x = 0.$$

För fixt x är detta ett ekvationssystem med två obekanta och två ekvationer, med entydig lösning

$$P(x) = 2\,\frac{\sin x}{\cos x - \sin x}, \qquad Q(x) = -\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}.$$

Nämnaren, $\cos x - \sin x$, saknar nollställen på det indikerade intervallet, och därför är detta val av $P(x)$ och $Q(x)$ möjligt. Alltså är svaret ja.

---

3. [MODUL 3] Vilken funktion (eller distribution) har Laplace-transformen

$$\frac{s^2 + 3s - 9}{s^2 + s - 2}\, e^{-3s} \quad ?$$

Vi gör först polynomdivision, samt partialbråksuppdelning:

$$\frac{s^2 + 3s - 9}{s^2 + s - 2} = 1 - \frac{5/3}{s-1} + \frac{11/3}{s+2}.$$

Den funktion som har denna Laplace-transform är "funktionen"

$$g(t) = \delta_0(t) - \frac{5}{3}\, e^t + \frac{11}{3}\, 3\, e^{-2t}, \qquad (t > 0)$$

där δ_0 betecknar delta-funktionen med massa i origo. Att multiplicera med e^{-3s} är samma som att translatera till höger tre enheter och ersätta funktionen till vänster om 3 med noll, dvs den funktion som har den givna Laplacetransformen är

$$f(t) = \delta_3(t) - \frac{5}{3}\, H(t-3)\, e^{t-3} + \frac{11}{3}\, H(t-3)\, e^{-2(t-3)},$$

där δ_3 betecknar delta-funktionen med massa i 3, samt H är den s k Heaviside-funktionen (ibland betecknad med $\mathcal{U}$).

---

4. [MODUL 4] Lös fullständigt det autonoma systemet

$$\begin{cases} x' = x + y + 1, \\ y' = x - y - 2. \end{cases}$$

Rita dessutom ett fasporträtt med flödeslinjer (banor) kring den kritiska punkten. Finn slutligen den lösning som börjar i $x(0) = y(0) = 0$.

Den kritiska punkten ges ur

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0, \\ x - y - 2 = 0. \end{cases}$$

Lösningen är $x = 1/2$, $y = -3/2$, dvs den kritiska punkten är $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$. På matrisform blir systemet

$$X = AX + B, \qquad \text{där} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

En partikulärlösning blir den kritiska punkten:

$$X_p = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}.$$

Vi kan således koncentrera oss på det homogena systemet $X' = AX$. Detta kräver en analys av matrisen A. Spåret och determinanten för A är:

$$\tau = 0, \qquad \Delta = -2.$$

Detta betyder att egenvärdena till A ges av

$$\lambda_1 = \sqrt{2}, \qquad \lambda_2 = -\sqrt{2}.$$

Vi har alltså reella egenvärden av motsatt tecken, vilket ger en sadelpunkt i den kritiska

V.g. vänd!

punkten för vårt ursprungliga system. Motsvarande egenvektorer räknar vi lätt fram:

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad K_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Vi får den allmänna lösningen till det homogena problemet som

$$X_h = c_1\, K_1\, e^{\lambda_1 t} + c_2\, K_2\, e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} c_1\, e^{\sqrt{2}t} + c_2\, e^{-\sqrt{2}t} \\ c_1\,(-1+\sqrt{2})\, e^{\sqrt{2}t} + c_2\,(-1-\sqrt{2})\, e^{-\sqrt{2}t} \end{pmatrix}.$$

Den allmänna lösningen till det inhomogena problemet blir då

$$X = X_p + X_h = \begin{pmatrix} 1/2 + c_1\, e^{\sqrt{2}t} + c_2\, e^{-\sqrt{2}t} \\ -3/2 + c_1\,(-1+\sqrt{2})\, e^{\sqrt{2}t} + c_2\,(-1-\sqrt{2})\, e^{-\sqrt{2}t} \end{pmatrix}.$$

Om vi stoppar in initialdata att

$$X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bestämmer vi konstanterna lätt:

$$c_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{4}, \qquad c_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{4}.$$

Stoppar vi in dessa i vår allmänna lösning erhåller vi den sökta lösningen.

---

5. [MODUL 5] Beräkna med hjälp av Fourierserier summan

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

Tips: Betrakta funktionen $f(x) = e^x$ för x i intervallet $-\pi < x < \pi$ och utveckla denna i en 2π-periodisk Fourierserie, som på förra tentan. Välj sedan en speciell punkt x för att få den sökta summan. Förslag på sådana punkter:

$$x = 0,\ \ x = \frac{\pi}{6},\ \ x = \frac{\pi}{4},\ \ x = \frac{\pi}{3},\ \ x = \frac{\pi}{2},\ \ x = \frac{5\pi}{6},\ \ x = \frac{3\pi}{2},\ \ x = \pi.$$

Vi minns från tidigare tentamen (12 november 2004) att

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx),$$

där

$$a_n = \frac{(-1)^n(e^\pi - e^{-\pi})}{\pi(1+n^2)}, \qquad b_n = \frac{(-1)^{n-1}(e^\pi - e^{-\pi})\,n}{\pi(1+n^2)}.$$

För $x = \pi$ blir $\cos(nx) = \cos(n\pi) = (-1)^n$ och $\sin(nx) = \sin(n\pi) = 0$. Fourierserien blir därför i $x = \pi$

$$\frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi(1+n^2)} = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2}\right\}.$$

Men vad konvergerar den mot? Jo, enligt sats mot $\frac{1}{2}[f(\pi^+) + f(\pi^-)]$. Och $f(\pi^-) = e^\pi$, medan $f(\pi^+) = e^{-\pi}$ (varför?). Detta innebär att

$$\frac{e^\pi + e^{-\pi}}{2} = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2}\right\},$$

och således

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n^2} = \frac{1}{2} + \frac{\pi\bigl(e^\pi + e^{-\pi}\bigr)}{2\bigl(e^\pi - e^{-\pi}\bigr)}.$$