Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning, 2005-01-12, kl. 14.00–19.00.

5B1206 Differentialekvationer I, för BMP.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

För godkänt betyg (3) krävs minst 17 poäng, för betyg 4 krävs 25 poäng, medan för betyg 5 krävs 31 poäng. Lösningarna skall motiveras väl!

TENTAMENSSKRIVNING

1. Bestäm, på explicit form, alla lösningar till differentialekvationen

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-3y} \cos x.$$

Av vilken ordning är differentialekvationen? Är den linjär eller autonom? Finn även den lösning som har begynnelsevärde $y(0) = 0$, och beskriv var denna är definierad. (5)

Differentialekvationen är av första ordningen, olinjär, ej autonom. Däremot är den variabelseparerad. Vi skriver om den så här:

$$e^{3y}\, dy = e^{x} \cos x \, dx.$$

Vi integrerar bägge sidor och får

$$\frac{1}{3}\, e^{3y} = \frac{e^x}{2}\big(\cos x + \sin x\big) + C_1,$$

vilket förenklas som

$$e^{3y} = \frac{3\, e^x}{2}\big(\cos x + \sin x\big) + C_2.$$

Detta ger lösningen implicit; på explicit form blir det

$$y = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{3\, e^x}{2}\big(\cos x + \sin x\big) + C_2\right).$$

Begynnelsevärde $y(0) = 0$ motsvarar att $C_2 = -1/2$, så lösningen blir

$$y = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{3\, e^x}{2}\big(\cos x + \sin x\big) - \frac{1}{2}\right).$$

Denna lösning blir väldefinierad så länge som

$$3\, e^x \big(\cos x + \sin x\big) > 1.$$

Det största intervall kring $x = 0$ där denna olikhet gäller blir definitionsintervallet för lösningen. Vi inser från en överslagsräkning att detta intervall måste vara öppet och begränsat.

V.g. vänd!

2. Lös differentialekvationen

$$y'' - 4y' + 8y = \sin x.$$

Är ekvationen linjär? Homogen? Finn även den lösning som börjar i $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = 0$. (5)

Den karakteristiska ekvationen blir

$$\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0,$$

med rötter

$$\lambda_1 = 2 + 2i, \qquad \lambda = 2 - 2i.$$

Två linjärt oberoende lösningar till den homogena ekvationen blir således

$$y_1 = e^{2x}\cos(2x), \qquad y_2 = e^{2x}\sin(2x).$$

Vi behöver nu en partikulärlösning, och gissar att en finns på formen

$$y_p = A\cos x + B\sin x.$$

Direkt instoppning ger att

$$A = \frac{4}{65}, \qquad B = \frac{7}{65}.$$

Den generella lösningen blir således

$$y = y_p + y_h = y_p + C_1 y_1 + C_2 y_2 = \frac{4}{65}\cos x + \frac{7}{65}\sin x + C_1\, e^{2x}\cos(2x) + C_2\, e^{2x}\sin(2x).$$

Uttrycket för lösningens derivata blir

$$y' = -\frac{4}{65}\sin x + \frac{7}{65}\cos x + (C_1 + 2C_2)\, e^{2x}\cos(2x) + (C_2 - 2C_1)\, e^{2x}\sin(2x).$$

Lösningen med $y(\pi) = y'(\pi) = 0$ blir den som har konstanterna

$$C_1 = \frac{4}{65}\, e^{-2\pi}, \qquad C_2 = \frac{3}{130}\, e^{-2\pi}.$$

---

3. (a) Låt $\mathbf{A}$ vara en reell kvadratisk matris. Betrakta det homogena systemet av linjära differentialekvationer $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$. En lösning till detta system ges av $\mathbf{Z} = \mathbf{X}_1 + i\mathbf{X}_2$, där $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ är två vektorvärda reella funktioner, och i är imaginära enheten. Visa att i så fall uppfyller inte bara $\mathbf{Z}$ systemet utan även $\mathbf{X}_1$ och $\mathbf{X}_2$.

(b) Låt den reella matrisen $\mathbf{A}$ ha egenvärdet $\lambda = \alpha + i\beta$ och tillhörande egenvektor är $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2$, där $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ är reella vektorer. Visa utgående från detta hur två reella linjärt oberoende lösningar till systemet kan erhållas.

(c) Bestäm den allmänna lösningen till systemet

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{X}.$$

(5)

(a) Vi vet att $\mathbf{Z} = \mathbf{X}_1 + i\mathbf{X}_2$ satisfierar systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$. Insättning ger

$$\big(\mathbf{X}_1 + i\mathbf{X}_2\big)' = \mathbf{A}\big(\mathbf{X}_1 + i\mathbf{X}_2\big).$$

Utnyttjande av lineariteten hos deriveringen och matrismultiplikation ger

$$\mathbf{X}_1' + i\mathbf{X}_2' = \mathbf{A}\mathbf{X}_1 + i\mathbf{A}\mathbf{X}_2.$$

Om en komplex likhet gäller, måste både realdel och imaginärdel vara lika. Uttagande av realdel i ekvationen ovan ger $\mathbf{X}_1' = \mathbf{A}\mathbf{X}_1$, och motsvarande för imaginärdelen ger $\mathbf{X}_2' = \mathbf{A}\mathbf{X}_2$.

(b) En komplex lösning ges av

$$\mathbf{Z} = e^{(\alpha+i\beta)t}\big(\mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2\big).$$

Realdel respektive imaginärdel av den komplexa lösningen ger två reella linjärt oberoende lösningar (vi antar förstås $\beta \neq 0$. Vi får

$$\mathbf{X}_1 = e^{\alpha t}\big(\mathbf{v}_1\cos(\beta t) - \mathbf{v}_2\sin(\beta t)\big), \quad \mathbf{X}_2 = e^{\alpha t}\big(\mathbf{v}_1\sin(\beta t) + \mathbf{v}_2\cos(\beta t)\big).$$

(c) Egenvärden till matrisen blir $\lambda = -1 \pm 4i$. Vi bestämmer en egenvektor $\mathbf{v}$ till egenvärdet $\lambda = -1 + 4i$. Denna fås som lösning till ekvationen $\mathbf{0} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}$. Vi finner att vi kan välja

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-2i \end{pmatrix}.$$

En komplex lösning är

$$\mathbf{Z} = e^{(-1+4i)t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1-2i \end{pmatrix} = e^{-t}\big(\cos(4t) + i\sin(4t)\big)\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right].$$

Tar vi ut real- och imaginärdelar får vi

$$\mathbf{X}_1 = e^{-t}\begin{pmatrix} 2\cos(4t) \\ \cos(4t) + 2\sin(4t) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X}_2 = e^{-t}\begin{pmatrix} 2\sin(4t) \\ \sin(4t) - 2\cos(4t) \end{pmatrix}.$$

Denna allmänna lösningen ges av en linjärkombination av de två linjärt oberoende lösningarna:

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 = c_1\,e^{-t}\begin{pmatrix} 2\cos(4t) \\ \cos(4t) + 2\sin(4t) \end{pmatrix} + c_2\,e^{-t}\begin{pmatrix} 2\sin(4t) \\ \sin(4t) - 2\cos(4t) \end{pmatrix}.$$

4. Bestäm Fourierserien till funktionen som är π-periodisk och definieras av

$$f(t) = \sin^4 t, \qquad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.$$

(5)

Den givna funktionen $f(t)$ är en jämn funktion som är π-periodisk och dess Fourierserie har formen

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2nt).$$

Vi utvecklar vår funktion enligt följande:

$$f(t) = \sin^4 t = \left(\sin^2 t\right)^2 = \left(\frac{1-\cos(2t)}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1 - 2\cos(2t) + \cos^2(2t)}{4} = \frac{1-2\cos(2t)}{4} + \frac{1+\cos(4t)}{8}.$$

Förenklat ger detta

$$f(t) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{8}\cos(4t).$$

Vi har tydligen funnit den sökta Fourierserien. Detta motsvarar att

$$a_0 = \frac{3}{4}, \quad a_1 = -\frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{8},$$

medan $a_n = 0$ för alla andra n.

---

5. Genom att använda metoden med separation av variabler, lös ekvationen

$$u''_{xx} = u'_t, \qquad 0 < x < \pi, \;\; 0 < t < +\infty,$$

med randvillkoren

$$u(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0, \qquad 0 < t < +\infty,$$

och begynnelsevillkoret

$$u(x,0) = 1, \qquad 0 < x < \pi.$$

(6)

Tillämpning av variabelseparationsmetoden ger att $u(x,t)$ måste vara på formen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \, e^{-n^2 t/4} \sin \frac{nx}{2},$$

där $b_n = 0$ för jämna n. För $t = 0$ blir det

$$1 = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin \frac{nx}{2}, \qquad 0 < t < \pi.$$

Genom avläsning i tabellen på s. 309 i BETA finner vi att

$$b_n = \frac{2[1 + (-1)^{n-1}]}{\pi n}.$$

Lösningen blir därför

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^{n-1}}{n} \, e^{-n^2 t/4} \sin \frac{nx}{2}.$$

---

6. Lös ut funktionen $f(t)$ på intervallet $0 < t < +\infty$ ur ekvationen

$$f'(t) = \cos t + \int_0^t f(t-\tau) \cos \tau \, d\tau, \qquad f(0) = 1.$$

(5)

Vi Laplace-transformerar integro-differentialekvationen ($F(s)$ betecknar Laplacetransformen av $f(t)$):

$$sF(s) - f(0) = \frac{s}{s^2+1} + F(s) \, \frac{s}{s^2+1}.$$

Vi stoppar in begynnelsedata $f(0) = 1$, och löser ut $F(s)$:

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3}.$$

Vi återtransformerar, och får att

$$f(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2}.$$

Detta är alltså den sökta lösningen.

---

7. En öltillverkare har kommit på att det är bättre att blanda ut ölet med vatten, men ta lika mycket betalt ändå. Hans normala starköl håller en alkoholhalt på 6%, men tillverkaren tror att halten 4.5% bör räcka. Han har en 100 liters tank med 6%-igt öl, och börjar med en pump hälla ur öl i takten 2 liter per minut, medan han fyller på med vatten i takten 2 liter per minut. Ölblandningen i tanken omröres ordentligt hela tiden. När kommer ölet i tanken att hålla den önskade halten 4.5%? (5)

Vi observerar att volymen ölblandning är konstant i tanken är konstant. Om vi låter $x(t)$ beteckna alkoholhalten i tanken, är alltså totala volymen alkohol $100\,x(t)$ liter. Vi finner att infinitesimalt

$$100\,dx = -2x\,dt,$$

dvs

$$x' = -\frac{1}{50}\,x.$$

Denna differentialekvation har lösningen

$$x(t) = C_0\,e^{-t/50}.$$

konstanten C_0 är enligt uppgift $C_0 = 0.06$, så att

$$x(t) = \frac{6}{100}\,e^{-t/50}.$$

Vi söker den tidpunkt t_0 då $x(t_0) = 0.045$:

$$e^{-t_0/50} = \frac{3}{4}.$$

Detta ger

$$t_0 = 50\ln\frac{4}{3} \approx 14.4 \text{ min}.$$