Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning, 2005-08-23, kl. 08.00–13.00.

5B1206 Differentialekvationer I, för BMP.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

För godkänt betyg (3) krävs minst 17 poäng, för betyg 4 krävs 25 poäng, medan för betyg 5 krävs 31 poäng. Lösningarna skall motiveras väl!

TENTAMENSSKRIVNING

1. Bestäm, på explicit form, alla lösningar till differentialekvationen

$$\frac{dy}{dx} = e^y \sin^2 x.$$

Av vilken ordning är differentialekvationen? Är den linjär eller autonom? Finn även den lösning som har begynnelsevärde $y(0) = 0$, och beskriv var denna är definierad. (5)

Differentialekvationen är av första ordningen, olinjär, ej autonom. Däremot är den variabelseparerad. Vi skriver om den så här:

$$e^{-y}\, dy = \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2x)\big)\, dx.$$

Vi integrerar bägge sidor och får

$$-e^{-y} = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x) + C_1,$$

vilket förenklas som

$$e^{-y} = \frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{x}{2} + C_2.$$

Detta ger lösningen implicit; på explicit form blir det

$$y = -\ln\left(\frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{x}{2} + C_2\right).$$

Begynnelsevärde $y(0) = 0$ motsvarar att $C_2 = 1$, så lösningen blir

$$y = -\ln\left(\frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{x}{2} + 1\right).$$

Denna lösning blir väldefinierad så länge som

$$\frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{x}{2} + 1 > 0.$$

Det största intervall kring $x = 0$ där denna olikhet gäller blir definitionsintervallet för lösningen. Vi inser från en överslagsräkning att detta intervall måste vara öppet och begränsat åt höger.

V.g. vänd!

2. Betrakta funktionen

$$y = e^x + C_1\, e^{2x} + C_2\, e^{3x},$$

där C_1, C_2 är fria reella parametrar. Antag att y är den allmänna lösningen till en linjär differentialekvation. Vad är då dimensionen för lösningsrummet, samt ordningen för differentialekvationen? Finn slutligen en sådan linjär differentialekvation med y som allmän lösning. (5)

Vi har två fria parametrar, så lösningsrummet är två-dimensionellt. Därför har differentialekvationen ordning 2.

En differentialekvation med det givna lösningsrummet är

$$y'' - 5y' + 6y = 2\, e^x.$$

---

3. I en modell av två kvarkars interaktion gör vi förenklingen att en av dessa är stationär, och vi tänker oss att båda ligger längs en linje. Vi betecknar med x_0, x_1 positionerna för kvarkarna, och sätter $x_0 = 0$. Ekvationen som beskriver x_1:s rörelse i tiden t är (vi skriver x istället för x_1)

$$x' = \frac{1 - x^2}{x}.$$

Lös denna ekvation. Är den autonom? Kommer kvarkarna att vara bundna till varandra? (5)

Ekvationen är autonom, eftersom tidsvariabeln ej syns explicit. Vi löser nu ekvationen:

$$\frac{x}{x^2 - 1}\, dx = -dt.$$

Eftersom

$$\frac{x}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 1}\right),$$

så en primitiv funktion

$$\frac{1}{2}\Big(\ln|x - 1| + \ln|x + 1|\Big) = \frac{1}{2}\ln\left|x^2 - 1\right|.$$

Integration av bägge sidor av ekvationen ger

$$\frac{1}{2}\ln\left|x^2 - 1\right| = -t + C_1,$$

det vill säga

$$\left|x^2 - 1\right| = C_2\, e^{-2t}.$$

Vi tar nu bort absolutbeloppstecknet, och nyttjar därvid att lösningarna måste vara kontinuerliga:

$$x^2 - 1 = C_3\, e^{-2t}.$$

Lösningen blir alltså

$$x = \sqrt{1 + C_3\, e^{-2t}} \quad \text{eller} \quad x = -\sqrt{1 + C_3\, e^{-2t}}.$$

Om $C_3 \geq 0$ får vi lösningar definierade för alla t. Alla lösningar går asymptotisk mot 1 eller -1; vi har alltså stabilitet, och kvarkarna blir bundna till varandra.

---

4. Bestäm alla kritiska punkter till det autonoma systemet

$$\begin{cases} x' = 1 + xy, \\ y' = x + y. \end{cases}$$

Bestäm deras typ (nod, sadelpunkt, spiral, centrum) och avgör om möjligt huruvida de är stabila eller instabila. (5)

Systemet är

$$\begin{cases} x' = P(x,y), \\ y' = Q(x,y), \end{cases}$$

där $P(x,y) = 1 + xy$ och $Q(x,y) = x + y$. De kritiska punkterna ges som lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 1 + xy = 0 \\ x + y = 0. \end{cases}$$

Eftersom $y = -x$, måste $1 - x^2 = 0$, dvs $x = 1$ eller $x = -1$. Vi får två fall.

Fall 1. $x = 1$ och $y = -1$.

Fall 2. $x = -1$ och $y = 1$.

Sätt

$$A = \begin{pmatrix} P'_x & P'_y \\ Q'_x & Q'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

I fall 1 fås

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Detta är lineariseringsmatrisen för systemet i den givna kritiska punkten. En kalkyl ger att denna har egenvärdena $\sqrt{2}$ och $-\sqrt{2}$, vilket innebär att $(1,-1)$ är en instabil sadelpunkt.

I fall 2 fås istället

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Denna matris har egenvärdena $1 + i$ och $1 - i$, vilket innebär att $(-1,1)$ är en instabil spiralpunkt.

---

5. Genom att använda metoden med separation av variabler, lös ekvationen

$$4\, u_{xx} = u_t, \qquad 0 < x < \pi,\ \ 0 < t < +\infty,$$

med randvillkoren

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad 0 < t < +\infty,$$

och begynnelsevillkoret

$$u(x,0) = 1, \qquad 0 < x < \pi.$$

(6)

Tillämpning av variabelseparationsmetoden ger att $u(x,t)$ måste vara på formen

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \, e^{-(2n+1)^2 t} \, \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right].$$

För $t = 0$ blir det

$$1 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \, \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right], \qquad 0 < x < \pi.$$

Funktionen på höger sida är 4π-periodisk, med värde 1 på intervallet $]-\pi,\pi[$, samt värde -1 på $]-2\pi,-\pi[$ och $]\pi,2\pi$. Genom avläsning i tabellen på s. 309, fall (1), i BETA finner vi att

$$a_n = \frac{4\,(-1)^n}{\pi(2n+1)}.$$

Lösningen blir därför

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \, e^{-(2n+1)^2 t} \, \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right].$$

---

6. Lös ut funktionen $f(t)$ på intervallet $0 < t < +\infty$ ur ekvationen

$$f'(t) = \sin(3t) + \int_0^t f(t-\tau)\,\cos(2\tau)\,d\tau, \qquad f(0) = 5.$$

(5)

Vi inser att integralen på höger sida är en faltning. Samtidigt drar vi oss till minnes att Laplace-transformen av en faltning blir en vanlig produkt. Laplace-transformen av $\cos(2t)$ är enligt BETA

$$\frac{s}{s^2+4}.$$

Ekvationen ovan lyder – efter Laplace-transformering –

$$s\widetilde{f}(s) - f(0) = \frac{3}{s^2+9} + \frac{s\widetilde{f}(s)}{s^2+4}.$$

Detta skriver vi om som

$$\widetilde{f}(s)\left[s - \frac{s}{s^2+4}\right] = \frac{3}{s^2+9} + 5,$$

och får lösningen

$$\widetilde{f}(s) = \frac{(5s^2+48)(s^2+4)}{s(s^2+3)(s^2+9)} = \frac{64}{9s} - \frac{11}{6}\,\frac{s}{s^2+3} - \frac{5}{18}\,\frac{s}{s^2+9}.$$

Invers Laplace-transformering ger nu att

$$f(t) = \frac{64}{9} - \frac{11}{6}\cos(\sqrt{3}t) - \frac{5}{18}\cos(3t).$$

---

7. En öltillverkare har kommit på att det är bättre att blanda in lite svartsprit i lättöl, för att sedan sälja produkten som starköl till lite mindre nogräknade nattklubbar i stan. Lättölet håller 2.1% alkohol, medan svartspriten håller 40%. Han eftersträvar en total alkoholhalt på starkölet på 5.5%. Tillverkaren har en 100 liters tank med lättöl, och börjar med en pump hälla ur öl i takten 1 liter per minut, medan han fyller på med svartsprit i samma takt, 1 liter per minut. Ölblandningen i tanken omröres ordentligt hela tiden. När kommer ölet i tanken att hålla den önskade halten 5.5%?

(5)

Vi observerar att volymen ölblandning är konstant i tanken är konstant. Om vi låter $x(t)$ beteckna alkoholhalten i tanken, är alltså totala volymen alkohol $100\,x(t)$ liter. Vi finner att infinitesimalt

$$100\,dx = 0.4\,dt - x\,dt,$$

dvs

$$x' = \frac{4}{1000} - \frac{1}{100}\,x.$$

Denna differentialekvation har lösningen

$$x(t) = \frac{4}{10} + C_0\,e^{-t/100};$$

konstanten C_0 bestäms ur $x(0) = 0.021$. Vi får härur $C_0 = -0.379$, så att

$$x(t) = 0.4 - 0.379\,e^{-t/100}.$$

Vi söker den tidpunkt t_0 då $x(t_0) = 0.055$:

$$e^{-t_0/100} = \frac{0.345}{0.379}.$$

Detta ger

$$t_0 = 100 \ln \frac{379}{345} \approx 9.4 \text{ min}.$$