Tentamensskrivning, 2005-11-18, kl. 14.00–19.00.

5B1206 Differentialekvationer I, för BD-M-P.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

För godkänt betyg (3) krävs minst 4 av 5 moduler godkända (Del 1). För överbetyg krävs dessutom deltagande i Del 2. Lösningarna skall motiveras väl!

TENTAMENSSKRIVNING: DEL 1

1. [MODUL 1] Vi har en vattentank som rymmer exakt 100 liter. Från början har vi tanken fylld med 100 liter kranvatten (utan salt). Vi önskar få bräckvatten som passar sälar från Östersjön. Dessa trivs med $1,1\%$ salthalt. Vi fyller successivt på med saltvatten taget från världshavet med salthalt $3,3\%$, medan vi samtidigt häller ut saltblandat vatten, båda i takten 1 liter per minut. Hela tiden blandar vi frenetiskt ut den allt starkare saltlösningen. Efter hur lång tid kommer salthalten i tanken att passa sälarna?

Vi observerar först att volymen vatten hela tiden kommer att vara konstant 100 liter. Detta innebär att vi kan räkna direkt med saltkoncentrationer istället för att ta hänsyn till totala saltmängder. Låt $x = x(t)$ beteckna saltkoncentrationen vid tid t. Initialt har vi då $x(0) = 0$. Inflödet (räknat som koncentrationsförändring) blir under en infinitesimalt kort tid dt lika med $\frac{0,033}{100}\,dt$, medan utflödet blir $\frac{x}{100}\,dt$. Vi erhåller således differentialekvationen

$$\frac{dx}{dt} = \frac{0,033}{100} - \frac{x}{100},$$

med allmän lösning

$$x(t) = 0,033 + C\,e^{-t/100},$$

där tiden räknas i minuter. För att $x(0) = 0$ måste vi kräva att $C = -0,033$, så att

$$x(t) = 0,033 - 0,033\,e^{-t/100}.$$

För att lösa uppgiften söker vi t så att

$$0,011 = 0,033 - 0,033\,e^{-t/100},$$

vilket inträffar då

$$t = 100 \ln \frac{3}{2} \approx 40,5 \text{ min.}$$

2. [MODUL 2] Finn en linjär homogen differentialekvation av andra ordningen så att funktionerna $y_1(x) = x$ och $y_2(x) = x^2$ är lösningar. Beskriv därefter den allmänna lösningen till differentialekvationen.

Vi skriver den allmänna linjära homogena differentialekvation av andra ordningen på formen

$$y'' + py' + qy = 0,$$

där p och q är funktioner som vi söker. Instoppning av y_1 ger

$$p + x\,q = 0,$$

medan instoppning av y_2 ger

$$2 + 2x\,p + x^2\,q = 0.$$

Löser vi ut p och q får vi

$$p = -\frac{2}{x}, \qquad q = \frac{2}{x^2},$$

och efter omskrivning blir ekvationen

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

Denna har enligt teorin den allmänna lösningen

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1\,x + C_2\,x^2,$$

där C_1, C_2 är fria konstanter.

---

3. [MODUL 3] Vilken funktion (eller distribution) har Laplace-transformen

$$\frac{s}{s^2+9}\,e^{-2s} \quad ?$$

Enligt [BETA, s. 327], så har funktionen $\cos(3t)$ Laplacetransformen $s/(s^2+9)$. Återigen enligt [BETA, s. 326], innebär multiplikation med e^{-2s} på den transformerade sidan en translation med två enheter. Svaret är alltså:

$$\cos(3(t-2))\,H(t-2),$$

där H står för Heaviside-funktionen.

---

4. [MODUL 4] Bestäm de kritiska punkterna till det autonoma systemet

$$\begin{cases} x' = e^y - 1, \\ y' = -x - e^x \sin y. \end{cases}$$

Skriv upp det lineariserade systemet kring varje kritisk punkt på matrisform, och lös dessa lineariserade problem fullständigt; rita dessutom ett fasporträtt med flödeslinjer (banor). Avgör stabilitetsanalysen för det lineariserade problemet även stabiliteten för det ursprungliga olinjära systemet?

Vi bestämmer först de kritiska punkterna; dessa fås ur ekvationssystemet

$$\begin{cases} e^y - 1 = 0, \\ -x - \; e^x \sin y = 0. \end{cases}$$

Vi inser snabbt att den enda lösningen är $x = y = 0$, dvs den enda kritiska punkten är $(0, 0)$. Lineariseringen i $(0, 0)$ ger

$$e^y - 1 \approx y, \qquad -x - e^x \sin y \approx -x - y.$$

Det lineariserade systemet blir således

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x - y. \end{cases}$$

På matrisform blir det

$$X = AX, \qquad \text{där} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vi får spår och determinant för A:

$$\tau = -1, \qquad \Delta = 1.$$

Detta betyder att egenvärdena till A ges av

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vi har alltså komplexa egenvärden, med negativ realdel. Enligt teorin innebär detta att fasdiagrammet blir en stabil spiral (vilken ej kan ritas inom detta datorsystem). För att avgöra rotationsriktningen, tittar vi på en punkt längs med positiva y-axeln, och ser att x växer och y avtar där. Gör vi motsvarande analys av negativa y-axeln, samt positivs och negativa x-axeln, ser vi att om vi gå i positiv tidsriktning går spiralen medurs.

För att lösa det lineariserade systemet, behöver vi egenvektorer till egenvärdena. Dessa löses ut enligt standard-metod frå Linjär Algebra; resultatet är

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, \qquad K_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Vi skriver $K_1 = B_1 + iB_2$ och $K_2 = B_1 - iB_2$, med B_1 och B_2 reella,

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

Vi får nu enligt recept i läroboken två reellvärda lösningar,

$$X_1 = \Big[B_1 \cos\big(\sqrt{3}t/2\big) - B_2 \sin\big(\sqrt{3}t/2\big)\Big]\, e^{-t/2},$$
$$X_2 = \Big[B_2 \cos\big(\sqrt{3}t/2\big) + B_1 \sin\big(\sqrt{3}t/2\big)\Big]\, e^{-t/2}.$$

Den allmänna lösningen till den lineariserade systemet blir således

$$X = c_1\, X_1 + c_2\, X_2 = \begin{pmatrix} c_1 \\ -c_1/2 + c_2\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} e^{-t/2} \cos\big(\sqrt{3}t/2\big) + \begin{pmatrix} c_2 \\ -c_2/2 - c_1\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} e^{-t/2} \sin\big(\sqrt{3}t/2\big).$$

Eftersom det lineariserade systemet är asymptotiskt stabilt i (0,0), gäller detsamma för det ursprungliga olinjära systemet.

---

5. [MODUL 5] Låt $f(x) = \sin^2 x$ för x i intervallet $-\pi < x < \pi$. Beräkna Fourierserien för denna funktion (2π-periodisk Fourierserie). Rita sedan upp grafen för Fourierserien på intervallet $[-3\pi, 5\pi]$.

Vi har att

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x),$$

se [BETA, s. 124]. Höger led är redan en Fourierserie, och alltså är detta den sökta Fourierserien. Svaret är således

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x).$$

Grafen blir förstås den kända grafen för $\sin^2 x$, som vi avstår från att rita.