Tentamensskrivning, 2005-11-18, kl. 14.00–19.00.

5B1206 Differentialekvationer I, för BD-M-P.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

För betyg 4 krävs 10 poäng, medan för betyg 5 krävs 15 poäng. Lösningarna skall motiveras väl!

TENTAMENSSKRIVNING: DEL 2

1. Vi har en tank med saltvatten med koncentration 20%; maxvolymen som tanken rymmer är 1000 liter. Ursprungligen har vi 500 liter 20% saltvatten i tanken. Vi tillför nu i takten 2 liter per minut kranvatten (utan salt) och blandar väl, medan vi i takten 1 liter per minut pumpar ut blandningen. Bestäm som ett första steg när tanken är full. Avgör därefter vad salthalten kommer att vara då tanken är full. (5)

Vi börjar med att observera att 20% saltlösning motsvarar 200 gram per liter. Detta innebär att vi vid start har 100 kg salt i tanken. Volymen vätska $V = V(t)$ i tanken kommer att utvecklas linjärt:

$$V(t) = 500 + t,$$

om t mäts i minuter och volymen mäts i liter. Detta betyder att tanken är full efter 500 minuter. Låt $x = x(t)$ beteckna mängden salt i tanken, räknat i gram. Vi har då $x(0) = 100000$. Under en infinitesimalt kort tidsperiod dt tillför vi 0 gram salt, medan vi pumpar ut

$$\frac{x}{V}\,dt$$

gram salt. Vi får således differentialekvationen

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{V}.$$

Denna löses med metoden *integrerande faktor*. Slutresultatet blir att

$$x = \frac{C}{500+t},$$

där konstanten $C = 50000000$ bestäms ut begynnelsevillkoret $x(0) = 100000$. Vid $t = 500$ blir $x = 50$ kg salt, och koncentration blir därför 5%.

---

2. Bestäm en funktion f som satisfierar ekvationen

$$f(t) = e^{-3t} + \int_0^t f(t-\tau)\,\cos(2\tau)\,d\tau$$

på intervallet $[0, +\infty[$. (5)

V.g. vänd!

Vi inser att integralen på höger sida är en faltning. Samtidigt drar vi oss till minnes att Laplace-transformen av en faltning blir en vanlig produkt. Laplace-transformen av $\cos(2t)$ är enligt BETA

$$\frac{s}{s^2+4}.$$

Ekvationen ovan lyder – efter Laplace-transformering –

$$\widetilde{f}(s) = \frac{1}{s+3} + \frac{s\,\widetilde{f}(s)}{s^2+4}.$$

Detta skriver vi om som

$$\widetilde{f}(s)\left[1 - \frac{s}{s^2+4}\right] = \frac{1}{s+3},$$

och får lösningen

$$\widetilde{f}(s) = \frac{s^2+4}{(s+3)(s^2-s+4)} = \frac{13/16}{s+3} + \frac{3s/16+1/4}{s^2-s+4}.$$

Nästa steg är att kvadratkomplettera:

$$s^2 - s + 4 = (s-1/2)^2 + 15/4.$$

Detta ger att

$$\frac{3s/16+1/4}{s^2-s+4} = \frac{3(s-1/2)/16}{(s-1/2)^2+15/4} + \frac{11/32}{(s-1/2)^2+15/4}.$$

Vi tillämpar nu regel L5 på s. 326 i [BETA], och får att

$$f(t) = \frac{13}{16}\,e^{-3t} + \frac{3}{16}e^{t/2}\cos(\sqrt{15}t/2) + \frac{11\sqrt{15}}{16}e^{t/2}\sin(\sqrt{15}t/2).$$

---

3. Lös fullständligt systemet (t betecknar den oberoende variabeln)

$$\begin{cases} x' = x + \beta\,y + t^2, \\ \;y' = x - y, \end{cases}$$

där β betecknar en reell parameter. Bestäm därvid även den lösning som har begynnelsedata $x(0) = y(0) = 0$, samt avgör dess beteende då tiden $t \to +\infty$. (5)

Vi skriver om systemet på vektorform:

$$X' = AX + B, \qquad \text{där} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi löser först det homogena problemet $X' = AX$. Matrisen A har spår och determinant:

$$\tau = 0, \qquad \Delta = -\beta - 1.$$

Detta innebär att egenvärdena till A ges av

$$\lambda_1 = \sqrt{\beta+1}, \qquad \lambda_2 = -\sqrt{\beta+1}.$$

Vi får reella egenvärden om $\beta \geq -1$, och komplexa om $\beta < -1$.

Vi får motsvarande egenvektorer

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1+\lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad K_2 = \begin{pmatrix} 1+\lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Detta innebär att den allmänna homogena lösningen är

$$\begin{aligned} X_h = c_1\,X_1 + c_2\,X_2 = c_1\,K_1\,e^{\lambda_1 t} + c_2\,K_2\,e^{\lambda_2 t} \\ = \begin{pmatrix} c_1(1+\lambda_1)\,e^{\lambda_1 t} + c_2(1+\lambda_2)\,e^{\lambda_2 t} \\ c_1\,e^{\lambda_1 t} + c_2\,e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Om $\beta < -1$ då vi får komplexa egenvärden är det lämpligt att skriva om lösningen i termer av cosinus och sinus, men det lämnar vi till den intresserade eleven. Vi behöver nu en partikulärlösning. För $\alpha \neq -1$ ges en av

$$X_p = -\frac{t^2}{\beta+1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2t}{\beta+1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{(\beta+1)^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

För $\beta = -1$ får vi ta till polynom av högre grad istället. Vi lämnar detta fall till den ambitiöse eleven. Den allmänna lösningen ges av

$$X = X_p + X_h = X_p + c_1X_1 + c_2X_2;$$

konstanterna c_1, c_2 bestäms för att få lösningen som för $t = 0$ börjar i origo. Om $\beta > -1$ får vi att denna speciella X_h går mot oändligheten exponentiellt och att alltså lösningen X divergerar mot oändligheten då $t \to +\infty$. Om $beta < -1$ håller sig den homogena lösningen begränsad, och vi får även då divergens mot oändligheten. Fallet $\beta = -1$ lämnar vi till den ambitiöse eleven.

---

4. Betrakta vågekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = 0, \qquad (0 < x < \pi,\ \ 0 < t < +\infty)$$

med sidorandvillkor

$$u(0,t) = 0, \qquad u(\pi,t) = 0, \qquad (t > 0).$$

Begynnelsedata är

$$u(x,0) = \sin(3x) + \sin(5x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin(7x) - \sin(13x), \qquad (0 < x < \pi).$$

Finn den funktion $u(t,x)$ som löser ovanstående vågekvation. (5)

Tillämpning av variabelseparationsmetoden ger att den allmänna łösningen bör sökas på formen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big\{ a_n \sin(nx)\cos(nt) + b_n \sin(nx)\sin(nt) \Big\},$$

där koefficienterna a_n och b_n återstår att bestämma. Instoppning av $t = 0$ ger

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(nx),$$

och eftersom detta skall vara lika med $\sin(3x) + \sin(5x)$ måste $a_3 = a_5 = 1$ medan alla andra a_n är lika med noll. Vi deriverar $u(x,t)$ partiellt med avseende på t och får

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big\{ -n\,a_n \sin(nx)\sin(nt) + n\,b_n \sin(nx)\cos(nt) \Big\},$$

så att

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,b_n \sin(nx).$$

Detta skall vara lika med

$$\sin(7x) - \sin(13x),$$

vilket kräver att

$$b_7 = \frac{1}{7}, \qquad b_{13} = -\frac{1}{13},$$

medan alla andra b_n är lika med noll. Vår sökta lösning blir alltså:

$$u(x,t) = \sin(3x)\cos(3t) + \sin(5x)\cos(5t) + \frac{1}{7}\,\sin(7x)\sin(7t) - \frac{1}{13}\,\sin(13x)\sin(13t).$$