Tentamensskrivning, 2005-12-05, kl. 15.00–18.00.

5B1206 Differentialekvationer I, för BD-M-P.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

För godkänt betyg (3) krävs minst 4 av 5 moduler godkända. Lösningarna skall motiveras väl!

LÖSNINGSFÖRSLAG KOMPLETTERINGSTENTAMEN

1. [MODUL 1] Vi har en vattentank som rymmer exakt 1000 liter. Från början har vi tanken fylld med 1000 liter saltvatten av salthalt 5%. V fyller successivt på med saltvatten med salthalt 10%, medan vi samtidigt häller ut det blandade vattnet, båda i takten 1 liter per minut. Hela tiden blandar vi frenetiskt ut den allt starkare saltlösningen. Efter hur lång tid kommer salthalten att nå 7%?

Vi observerar först att volymen vatten hela tiden kommer att vara konstant 1000 liter. Detta innebär att vi kan räkna direkt med saltkoncentrationer istället för att ta hänsyn till totala saltmängder. Låt $x = x(t)$ beteckna saltkoncentrationen vid tid t. Initialt har vi då $x(0) = 0,05$. Inflödet (räknat som koncentrationsförändring) blir under en infinitesimalt kort tid dt lika med $\frac{0,10}{1000}\,dt$, medan utflödet blir $\frac{x}{1000}\,dt$. Vi erhåller således differentialekvationen

$$\frac{dx}{dt} = \frac{0,10}{1000} - \frac{x}{1000},$$

med allmän lösning

$$x(t) = 0,10 + C\,e^{-t/1000},$$

där tiden räknas i minuter. För att $x(0) = 0,05$ måste vi kräva att $C = -0,05$, så att

$$x(t) = 0,10 - 0,05\,e^{-t/1000}.$$

För att lösa uppgiften söker vi t så att

$$0,07 = 0,10 - 0,05\,e^{-t/1000},$$

vilket inträffar då

$$t = 1000 \ln \frac{5}{3} \text{ min.}$$

---

2. [MODUL 2] Finn en linjär homogen differentialekvation av andra ordningen så att funktionerna $y_1(x) = e^x$ och $y_2(x) = \sin x$ är lösningar. Beskriv på vilket (vilka) intervall differentialekvationen är icke-singulär. Skriv därefter upp den allmänna lösningen till differentialekvationen.

Den allmänna linjära homogena differentialekvationen av andra ordningen ser ut så här:

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = 0.$$

Vi stoppar in funktionerna i differentialekvationen:

$$e^x + P(x)\,e^x + Q(x)\,e^x = 0, \qquad -\sin x + P(x)\,\cos x + Q(x)\,\sin x = 0.$$

För fixt x är detta ett ekvationssystem med två obekanta och två ekvationer, med entydig lösning

$$P(x) = 2\,\frac{\sin x}{\cos x - \sin x}, \qquad Q(x) = -\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}.$$

Ekvationen blir icke-singulär så länge som vi inte delar med 0, dvs $\cos x \neq \sin x$. Eftersom

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\sin(x + 3\pi/4),$$

blir ett (maximalt) intervall där ekvationen är icke-singulär $-3\pi/4 < x < \pi/4$. Den allmänna lösningen till differentialekvationen blir förstås

$$y = C_1 e^x + C_2 \sin x,$$

där C_1, C_2 är fria konstanter.

---

3. [MODUL 3] Vilken funktion (eller distribution) har Laplace-transformen

$$\frac{s}{(s+2)^2+9}\,e^{-5s} \quad ?$$

Enligt [BETA, s. 327], så har funktionen $\cos(3t)$ Laplacetransformen $s/(s^2+9)$, medan $\sin(3t)$ har Laplacetransformen $3/(s^2+9)$. Vi skriver om:

$$\frac{s}{(s+2)^2+9} = \frac{s+2}{(s+2)^2+9} - \frac{2}{(s+2)^2+9}.$$

Translationen $s \mapsto s+2$ motsvarar i t-variabeln multiplikation med e^{-2t}. Vi ser alltså att

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+2)^2+9}\right\} = e^{-2t}\cos(3t) - \frac{2}{3}\,e^{-2t}\sin(3t).$$

Återigen enligt [BETA, s. 326], innebär multiplikation med e^{-5s} på den transformerade sidan en translation med två enheter. Svaret är alltså:

$$\left(e^{-2(t-5)}\cos(3(t-5)) - \frac{2}{3}\,e^{-2(t-5)}\sin(3(t-5))\right)H(t-5),$$

där H står för Heaviside-funktionen.

---

4. [MODUL 4] Bestäm de kritiska punkterna till det autonoma systemet

$$\begin{cases} x' = e^x + e^y - 2, \\ y' = e^x - e^y. \end{cases}$$

Skriv upp det lineariserade systemet kring varje kritisk punkt på matrisform, och lös dessa lineariserade problem fullständigt; rita dessutom ett fasporträtt med flödeslinjer (banor). Avgör stabilitetsanalysen för det lineariserade problemet även stabiliteten för det ursprungliga olinjära systemet?

Vi bestämmer först de kritiska punkterna; dessa fås ur ekvationssystemet

$$\begin{cases} e^x + e^y - 2 = 0, \\ e^x - e^y = 0. \end{cases}$$

Vi inser snabbt att den enda lösningen är $x = y = 0$, dvs den enda kritiska punkten är $(0, 0)$. Lineariseringen i $(0, 0)$ ger

$$e^x + e^y - 2 \approx x + y, \qquad e^x - e^y \approx x - y.$$

Det lineariserade systemet blir således

$$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = x - y. \end{cases}$$

På matrisform blir det

$$X = AX, \qquad \text{där} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vi får spår och determinant för A:

$$\tau = 0, \qquad \Delta = -2.$$

Detta betyder att egenvärdena till A ges av

$$\lambda_1 = \sqrt{2}, \qquad \lambda_2 = -\sqrt{2}.$$

Vi har alltså reella egenvärden, ett positivt och ett negativt. Enligt teorin innebär detta att fasdiagrammet blir en sadel (vilken ej kan ritas inom detta datorsystem).

För att lösa det lineariserade systemet, behöver vi egenvektorer till egenvärdena. Dessa löses ut enligt standard-metod från Linjär Algebra; resultatet är

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix}, \qquad K_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} - 1 \end{pmatrix}.$$

Vi får nu två lösningar,

$$X_1 = K_1\, e^{\sqrt{2}t},$$
$$X_2 = K_2\, e^{-\sqrt{2}t}.$$

Den allmänna lösningen till den lineariserade systemet blir således

$$X = c_1\, X_1 + c_2\, X_2 = \begin{pmatrix} c_1\, e^{\sqrt{2}t} + c_2\, e^{-\sqrt{2}t} \\ (\sqrt{2} - 1)c_1\, e^{\sqrt{2}t} - (\sqrt{2} + 1)c_2\, e^{-\sqrt{2}t} \end{pmatrix}$$

Eftersom det lineariserade systemet är instabilt i (0,0) med ett egenvärde som är positivt, är förstås det ursprungliga olinjära systemet också instabilt.

---

5. [MODUL 5] Låt $f(x) = \sin x \cos x$ för x i intervallet $-\pi < x < \pi$. Beräkna Fourierserien för denna funktion (2π-periodisk Fourierserie). Rita sedan upp grafen för Fourierserien på intervallet $[-3\pi, 5\pi]$.

V.g. vänd!

Vi har att

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\,\sin(2x),$$

se [BETA, s. 124]. Höger led är redan en Fourierserie, och alltså är detta den sökta Fourierserien. Svaret är således

$$\frac{1}{2}\,\sin(2x).$$

Grafen blir förstås den kända grafen för $\frac{1}{2}\,\sin(2x)$, som vi avstår från att rita.