Tentamensskrivning, 2006-01-14, kl. 14.00–19.00.

5B1206 Differentialekvationer I, för BDMP.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

För godkänt betyg (3) krävs minst 17 poäng, för betyg 4 krävs 24 poäng, medan för betyg 5 krävs 30 poäng. Lösningarna skall motiveras väl!

**TENTAMENSSKRIVNING**

1. Bestäm, på explicit form, den lösning till differentialekvationen

$$\frac{y'}{e^x} + y = 2e^{e^x}$$

som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 1$. (5)

---

Vi skriver om differentialekvation som

$$y' + (e^x)\, y = 2e^{e^x}\, e^x.$$

Multiplikation med integrerande faktor $e^{e^x}$ ger

$$e^{e^x}\, y' + e^{e^x}\, (e^x)\, y = 2\, e^{2e^x}\, e^x,$$

det vill säga

$$\frac{d}{dx}\left(e^{e^x}\, y\right) = 2\, e^{2e^x}\, e^x.$$

Denna ekvation har den allmänna lösningen

$$e^{e^x} y = e^{2\, e^x} + C,$$

eller, med andra ord,

$$y = e^{e^x} + C\, e^{-e^x}.$$

Begynnelsevillkoret

$$y(0) = e + C\, e^{-1} = 1$$

ger $C = e - e^2$, dvs

$$y = e^{e^x} - e(e-1)e^{-e^x},$$

vilket utgör den sökta lösningen.

---

2. Låt $T$ vara temperaturen hos en kaka och $T_0$ vara det omgivande rummets temperatur. Vi antar att Newtons avsvalningslag gäller, dvs att avsvalningshastigheten är proportionell mot temperaturdifferensen $T - T_0$. Rumstemperaturen är 23°C och kakan tas ut från en ugn med temperaturen 230°C. Efter 7 minuter är kakans temperatur 115°C. Bestäm kakans temperatur efter 20 minuter. (5)

---

Newtons avsvalningslag lyder

$$\frac{dT}{dt} = -k\big(T - T_0\big),$$

där $k$ är en positiv konstant. Lösningen är på formen

$$T(t) = T_0 + C\,e^{-kt},$$

där $C$ är en konstant, positiv eller negativ. I vårt fall är $T_0 = 23$, medan

$$T(0) = T_0 + C = 230.$$

Detta ger $C = 207$. Vi kan alltså skriva

$$T(t) = 23 + 207\,e^{-kt},$$

och vad som återstår är att fastställa värdet på $k$. Vi nyttjar att

$$T(7) = 23 + 207\,e^{-7k} = 115,$$

vilket ger $k = \frac{1}{7}\ln(207/92)$. Vi får slutligen

$$T(20) = 23 + 207\,e^{-20k} = 23 + 207\,e^{-(20/7)\ln(207/92)} \approx 43.4°\text{C},$$

vilket utgör den sökta temperaturen.

---

3. Lös fullständigt differentialekvationen

$$y'' + 9\,y = \frac{1}{\cos(3x)}, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{6}.$$

(5)

---

Den homogena differentialekvationen $y'' + 9y = 0$ har karakteristisk ekvation

$$\lambda^2 + 9 = 0,$$

med komplexa rötter $\lambda = \pm 3i$. Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen är då

$$y_h = C_1\,\cos(3x) + C_2\,\sin(3x).$$

För att finna en partikulärlösning till den givna ekvationen gör vi ansatsen

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2,$$

där $y_1 = \cos(3x)$ och $y_2 = \sin(3x)$. Man får

$$u_1' = -\frac{y_2 R}{W}, \qquad u_2' = \frac{y_1 R}{W}, \qquad \text{där} \quad R = \frac{1}{\cos(3x)},$$

och $W$ är Wronskianen:

$$W = \begin{vmatrix} \cos(3x) & \sin(3x) \\ -3\sin(3x) & 3\cos(3x) \end{vmatrix} = 3\cos^2(3x) + 3\sin^2(3x) = 3.$$

Alltså blir ekvationerna ovan

$$\begin{cases} u_1' = -\dfrac{\sin(3x)\,\frac{1}{\cos(3x)}}{3} = -\dfrac{1}{3}\,\tan(3x), \\[2ex] u_2' = \dfrac{\cos(3x)\,\frac{1}{\cos(3x)}}{3} = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Härur följer att

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{9}\ln\big|\cos(3x)\big| + A, \\[2ex] u_2 = \dfrac{x}{3} + B. \end{cases}$$

På vårt intervall $]0, \pi/6[$ är $\cos(3x) > 0$, och genom att välja konstanterna $A = B = 0$, finner vi således partikulärlösningen

$$y_p = \frac{1}{9}\cos(3x)\,\big(\ln(\cos(3x))\big) + \frac{1}{3}\,x\,\sin(3x).$$

Den allmänna lösningen blir slutligen

$$y = y_p + y_h = \frac{1}{9}\cos(3x)\,\big(\ln(\cos(3x))\big) + \frac{1}{3}\,x\,\sin(3x) + C_1\,\cos(3x) + C_2\,\sin(3x),$$

där $C_1, C_2$ är två godtyckliga konstanter.

---

4. Bestäm en funktion $f$ som satisfierar ekvationen

$$f(t) = \sin(2t) + \int_0^t e^{\tau}\,f(t-\tau)\,d\tau$$

på intervallet $[0, +\infty[$. (5)

---

Vi inser att integralen på höger sida är en faltning. Samtidigt drar vi oss till minnes att Laplace-transformen av en faltning blir en vanlig produkt. Laplace-transformen av $e^t$ är enligt BETA

$$\frac{1}{s-1}.$$

Ekvationen ovan lyder – efter Laplace-transformering –

$$\widetilde{f}(s) = \frac{2}{s^2+4} + \frac{\widetilde{f}(s)}{s-1}.$$

Detta skriver vi om som

$$\widetilde{f}(s)\left[1 - \frac{1}{s-1}\right] = \frac{2}{s^2+4},$$

och får lösningen

$$\widetilde{f}(s) = \frac{2(s-1)}{(s-2)(s^2+4)} = \frac{1/4}{s-2} - \frac{1}{4}\,\frac{s}{s^2+4} + \frac{3/2}{s^2+4}.$$

Invers Laplace-transformering ger nu att

$$f(t) = \frac{1}{4}\,e^{2t} - \frac{1}{4}\,\cos(2t) + \frac{3}{4}\,\sin(2t).$$

---

5. Bestäm alla kritiska punkter till det autonoma systemet

$$\begin{cases} x' = 2 + xy, \\ y' = x + y. \end{cases}$$

Bestäm deras typ (nod, sadelpunkt, spiral, centrum) och avgör om möjligt huruvida de är stabila eller instabila. (5)

V.g. vänd!

Vi börjar med de kritiska punkterna, och löser

$$\begin{cases} 2 + xy = 0 \\ x + y = 0. \end{cases}$$

Detta har två lösningar, punkten $x = \sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$ samt punkten $x = -\sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$. Vi får således två kritiska punkter, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ och $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Lineariseringsmatrisen blir

$$A = \begin{pmatrix} y_0 & x_0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

där $(x_0, y_0)$ står för en av de kritiska punkterna. Denna matris har spår $\tau = y_0 + 1$ och determinant $\Delta = y_0 - x_0$. Vi får alltså egenvärdena

$$\lambda_{1,2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2\sqrt{2}}$$

för punkten $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Ett egenvärde är positivt och det andra är negativt, så vi har en *sadelpunkt*. För punkten $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ får vi istället egenvärdena

$$\lambda_{1,2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2\sqrt{2}}.$$

Dessa egenvärden blir komplexa, med positiv realdel. Vi får alltså en *instabil spiral* i $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

---

6. Genom att använda metoden med separation av variabler, lös ekvationen

$$u_{xx} = u_t, \qquad 0 < x < \pi, \;\; 0 < t < +\infty,$$

med randvillkoren

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0, \qquad 0 < t < +\infty,$$

och begynnelsevillkoret

$$u(x,0) = \sin^2 x, \qquad 0 < x < \pi.$$

(5)

---

Tillämpning av variabelseparationsmetoden ger att $u(x,t)$ måste vara på formen

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, e^{-n^2 t} \cos(nx).$$

För $t = 0$ blir det

$$\sin^2 x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx), \qquad 0 < x < \pi.$$

Eftersom

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x),$$

blir $a_0 = \frac{1}{2}$ och $a_2 = -\frac{1}{2}$, medan alla andra $a_n$ är lika med noll. Lösningen blir således

$$u(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\, e^{-4t} \cos(2x).$$

7. Ett reningsverk har krav på sig att inte släppa ut vatten med en föreningsgrad (mätt som mängd partiklar per liter) på mer än 5%. Tyvärr är det så att reningsverket inte fungerar så effektivt, utan utsläppsnivån blir istället 10%. Att investera i ny teknologi för att nå målet är dyrt, så den fiffige driftchefen kommer på att han kan blanda ut med rent kranvatten för att uppnå sitt planmål. Han har en tank som rymmer 1000 liter, och den är redan fylld med 500 liter smutsvatten (10%-igt). Han fyller på i konstant takt med rent kranvatten, medan han i samma takt låter vattnet rinna ut från blandningen (som omröres hela tiden). Inspektionen kommer om 5 timmar, och då vill driftchefen precis ha uppnått målet om 5% utsläpp. I vilken takt bör han alltså hälla på med kranvatten? (6)

---

Vi observerar att volymen smutsvatten är konstant i tanken. Om vi låter $x(t)$ beteckna smutshalten i tanken, är alltså totala volymen smuts $500\,x(t)$ liter. Vi finner att infinitesimalt

$$500\,dx = -c\,x\,dt,$$

där $c$ betecknar hastigheten i ut- och inflödet (vilken vi skall bestämma). Detta leder till differentialekvationen

$$x' = -\frac{c}{500}\,x,$$

som har lösningen

$$x(t) = x_0\,e^{-ct/500};$$

konstanten $x_0$ bestäms ur $x(0) = 0.10$. Vi får $x_0 = 0.10$, så att

$$x(t) = 0.10\,e^{-ct/500}.$$

Om vi mäter tiden i timmar, krävs att $x(5) = 0.05$, vilket leder till

$$c = 100\ln 2 \approx 69,$$

i enheten liter per timme.