KTH Matematik

Tentamen tisdagen den 14 november 2006 för BD, M, P
5B1206, Differentialekvationer I

Skrivtid: 8.00–13.00

Examinator: Bengt Ek, tel 790 6951.

Tillåtet hjälpmedel: "Mathematics Handbook for Science and Engineering" (BETA) av Råde, Westergren.

Uppgifterna 1–5 svarar mot var sin modul i kursen.
Av dessa uppgifter skall man bara lösa dem som svarar mot moduler man inte blivit godkänd på under kursens gång.
De bedöms med G (för godkänd) eller U (för underkänd).

Betygsgränser: Tentamen blir godkänd om och endast om minst 4 av 5 moduler är godkända.
Godkänd tentamen och 14–20p på uppgifterna 6–10 ger betyg 5.
Godkänd tentamen och 8–13p på uppgifterna 6–10 ger betyg 4.
Godkänd tentamen och 0–7p på uppgifterna 6–10 ger betyg 3.

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade. Ange vad införda beteckningar som inte är standard står för.

1. Finn den lösning $y(x)$ till differentialekvationen

$$y' = x^2 + x^2y^2$$

som uppfyller $y(0) = 1$.

2. Differentialekvationen

$$xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0, \quad x > 0$$

har en lösning $y_1(x) = e^x$. Finn ekvationens allmänna lösning.

3. Finn lösningen $y(t)$ till problemet

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = 3\,\delta(t-1) \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1 \end{cases}.$$

$\delta(t)$ är Diracs deltafunktion.

4. Finn lösningen $\mathbf{x}(t)$ till problemet

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

5. Bestäm konstanten a så att funktionerna $f(x) = x + a$ och $g(x) = x^2 + 1$ är ortogonala på intervallet $[0, 1]$.

V.g. vänd!

6a. (1p) Bestäm en fundamentalmatris $\boldsymbol{\Phi}(t)$ till det homogena systemet

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

b. (3p) Finn den allmänna lösningen till det inhomogena systemet

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}.$$

7. (4p) Finn alla $f(t)$ med $f(0) = 0$ som uppfyller

$$f'(t) + \int_0^t e^{2u} f(t-u)\, du = 2(\cos t - \sin t).$$

8. (4p) Finn alla kritiska punkter för följande autonoma system. Avgör också för var och en av dem (om möjligt) om den är stabil eller instabil.

$$\begin{cases} x' = 1 - xy \\ y' = x - y^3 \end{cases}.$$

9. (4p) En kvadratisk platta med sidolängd π har den stationära (och z-oberoende) temperaturen $u(x, y)$. En av sidorna har temperaturen 1, de övriga har temperaturen 0. Bestäm temperaturen i plattan, om koordinatsystemet är valt så att $u(0, y) = u(x, 0) = u(\pi, y) = 0,\ u(x, \pi) = 1$, då $0 < x, y < \pi$. Svaret får ges som en oändlig serie.

10. (4p) Låt funktionen $f(x)$ vara deriverbar för alla reella x.
Låt vidare $y(x) = y_0(x)$ vara en lösning till differentialekvationen

$$y' + e^{f(x)} y = f'(x).$$

Finn en partikulärlösning $z(x)$ till differentialekvationen

$$z' + y_0'(x) z = y_0(x).$$

Svaret får inte innehålla derivator eller integraler.

Lycka till!

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.

En **kompletteringsskrivning** för de nästan godkända planeras till
må 4 december, kl. 13–15.
Information om sal och om vilka som får chans att komplettera kommer att finnas på kurssidan.