KTH Matematik

Lösningar tentamen 10 januari 2007 i 5B1206, Differentialekvationer I

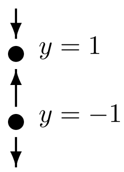
1. Finn alla kritiska punkter och avgör deras stabilitet för differentialekvationen $y' = ((\frac{\pi}{4})^2 - (\arctan y)^2)e^y$.

Lösning: Kritiska punkter ges av nollställen till HL $f(y) = ((\frac{\pi}{4})^2 - (\arctan y)^2)e^y = (\frac{\pi}{4} + \arctan y)(\frac{\pi}{4} - \arctan y)e^y$, dvs $y = \pm 1$. Tabellen t.h. ger svaret.

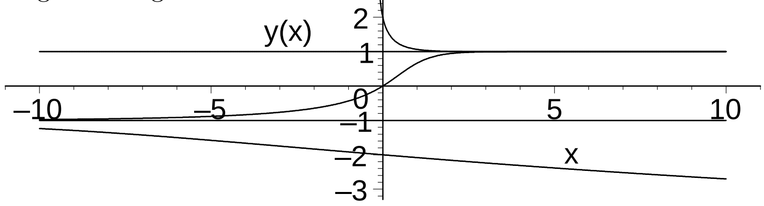
y		-1		1	
$f(y)$	$-$		$+$		$-$
$y(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Svar: De kritiska punkterna är $y = -1$ (instabil) och $y = 1$ (stabil).

Fasporträtt:



Några lösningar:



2. Differentialekvationen $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$, $x > 0$, har en lösning $y_1(x) = x$. Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen $x^2y'' - 2xy' + 2y = -x$, $x > 0$.

Lösning: Med **reduktion av ordningen** kan vi förenkla lösandet (också) av den inhomogena ekvationen. Vi skriver $y(x) = u(x)y_1(x) = u(x)x$ (detta är inte en ansats (dvs ett antagande om lösningens form), varje $y(x)$ kan skrivas så (ty $x > 0$)). Det ger $y' = u'x + u$ och $y'' = u''x + 2u'$. Insättning ger för $u(x)$ ekvationen $x^2(u''x + 2u') - 2x(u'x + u) + 2ux = x^3u'' = -x$, så $u'' = -\frac{1}{x^2}$ och $u' = \frac{1}{x} + A$, $u = \ln|x| + Ax + B$, A, B godtyckliga konstanter, dvs ($x > 0$) $y(x) = u(x)x = x\ln x + Ax^2 + Bx$.

Svar: Allmän lösning $y(x) = x\ln x + Ax^2 + Bx$, A, B godtyckliga konstanter.

3. Låt $y(t)$ vara den lösning till differentialekvationen $y'' + 3y' + 2y = \delta(t-4)$ som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 3$, $y'(0) = 5$. Vad är $y(5)$? $\delta(t)$ är Diracs deltafunktion.

Lösning: Laplacetransformering av ekvationen ger, med $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$, $\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s) - y(0) = sY(s) - 3$, $\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - 3s - 5$ och $\mathcal{L}\{\delta(t-4)\} = e^{-4s}$, att $s^2Y(s) - 3s - 5 + 3sY(s) - 9 + 2Y(s) = e^{-4s}$, dvs $(s^2+3s+2)Y(s) = (s+2)(s+1)Y(s) = 3s + 14 + e^{-4s}$. Vi löser ut och partialbråksuppdelar, vilket ger $Y(s) = -\frac{8}{s+2} + \frac{11}{s+1} - \frac{e^{-4s}}{s+2} + \frac{e^{-4s}}{s+1}$. Eftersom $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$ och $\mathcal{L}\{f(t-b)\mathcal{U}(t-b)\} = e^{-bs}F(s)$ (då $b \geq 0$, $\mathcal{U}$ är Heavisides stegfunktion) fås $y(t) = 11e^{-t} - 8e^{-2t} + \left(e^{-(t-4)} - e^{-2(t-4)}\right)\mathcal{U}(t-4)$.

Svar: Det sökta värdet är $y(5) = 11e^{-5} - 8e^{-10} + e^{-1} - e^{-2}$.

4. Formulera den icke-linjära andra ordningens differentialekvationen $x'' - x(x')^2 + \sin x = 0$ som ett plant första ordningens autonomt system och finn alla systemets kritiska punkter.

Lösning: En andra ordningens ekvation för $x(t)$ kan uttryckas som ett första ordningens system för $x(t), y(t)$ genom att låta $y = x'$.

I vårt fall ger det systemet $x' = y$, $y' = x'' = x(x')^2 - \sin x = xy^2 - \sin x$.

Dess kritiska punkter ges av $y = 0$, $xy^2 - \sin x = 0$, dvs $y = 0$, $\sin x = 0$, med lösningar $(n\pi, 0)$, n heltal.

Svar: Systemet $\begin{cases} x' = y \\ y' = xy^2 - \sin x \end{cases}$, kritiska punkter $(n\pi, 0)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

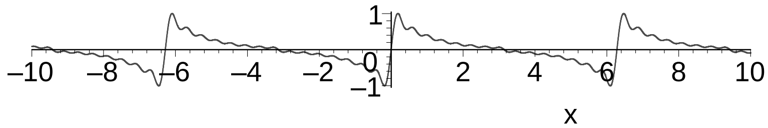
5. Finn (fourier-)sinusserien för funktionen $f(x) = e^{-x},\ \ 0 < x < \pi$.
Vad konvergerar serien mot då $x = \frac{3\pi}{2}$?

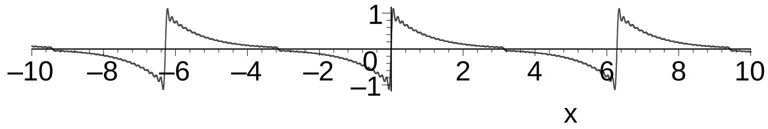
Lösning: Sinusserien för $f(x)$ (definierad på intervallet $[0, \pi]$) ges av $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, där, för $n = 1, 2, \ldots,\quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-x}\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-x}\operatorname{Im} e^{inx}\,dx = \frac{2}{\pi}\operatorname{Im}\int_0^{\pi} e^{(-1+in)x}\,dx = \frac{2}{\pi}\operatorname{Im}\left[\frac{e^{(-1+in)x}}{-1+in}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\operatorname{Im}\left(\frac{e^{(-1+in)\pi}-1}{-1+in}\right) = \frac{2}{\pi}\operatorname{Im}\left(\frac{((-1)^n e^{-\pi}-1)(-1-in)}{1+n^2}\right) = \frac{2n(1-(-1)^n e^{-\pi})}{\pi(n^2+1)}$ (alternativt kan man använda formel 330, sid. 175 i BETA.)

f:s sinusserie konvergerar mot en udda, 2π-periodisk funktion som sammanfaller med $f(x)$ då ($f(x)$ är kontinuerlig och) $0 < x < \pi$. För $x = \frac{3\pi}{2}$ konvergerar den alltså mot detsamma som för $\frac{3\pi}{2} - 2\pi = \frac{-\pi}{2}$ (2π-periodisk), nämligen (udda) mot $-f(\frac{\pi}{2}) = -e^{-\frac{\pi}{2}}$.

Svar: Serien är $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(1-(-1)^n e^{-\pi})}{\pi(n^2+1)} \sin nx$.
För $x = \frac{3\pi}{2}$ konvergerar den mot $e^{-\frac{\pi}{2}}$.

I figurerna visas partialsummorna med 15 respektive 50 termer:





6. Två bassänger innehåller (salt)vatten, vardera med volymen V (liter).
Mängderna salt i dem vid tiden t är $x_1(t)$ respektive $x_2(t)$ (kg).
Till bassäng 1 förs sötvatten med flödet r (l/min), från bassäng 1 förs (fullständigt blandat) vatten till bassäng 2 med ett lika stort flöde r och från bassäng 2 flödar (fullständigt blandat) vatten ut, också det med flödet r.
Vid tiden $t = 0$ är mängden salt i bassäng 1 a (kg), medan bassäng 2 innehåller rent sötvatten, dvs $x_1(0) = a,\ x_2(0) = 0$.
Hur mycket salt finns i varje bassäng när de innehåller lika mycket, dvs vad är $x_1(t_0)$ då t_0 är sådant att $x_1(t_0) = x_2(t_0)$?

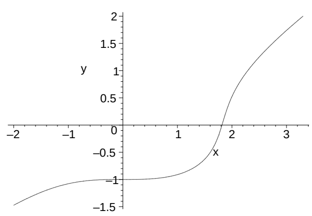
Lösning: x_1', x_2' ges av (netto)tillförd mängd salt per tidsenhet (flöde×koncentration), så

$$\begin{cases} x_1' = -\frac{r}{V}x_1 \\ x_1(0) = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2' = \frac{r}{V}x_1 - \frac{r}{V}x_2 \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$$

Det första problemet har lösningen $x_1(t) = a\,e^{-\frac{r}{V}t}$ och då man sätter in den i den andra ekvationen fås $x_2' = -\frac{r}{V}x_2 + \frac{r}{V}a\,e^{-\frac{r}{V}t}$, dvs (med integrerande faktor etc) $\left(e^{\frac{r}{V}t}x_2\right)' = \frac{r}{V}a$, så $x_2(t) = \frac{r}{V}at\,e^{-\frac{r}{V}t} + C\,e^{-\frac{r}{V}t}$, C konstant. $x_2(0) = 0$ ger $C = 0$, så lösningen blir $x_1(t) = a\,e^{-\frac{r}{V}t},\ x_2(t) = \frac{r}{V}at\,e^{-\frac{r}{V}t}$.
Villkoret $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ ger $1 = \frac{r}{V}t_0$, så $t_0 = \frac{V}{r}$, som ger $x_1(t_0) = a\,e^{-1}$.
Svar: Mängden salt i vardera bassängen blir $a\,e^{-1}$ (kg).

7. Begynnelsevärdesproblemet $y' = \frac{x^2}{3y^2+1},\ y(0) = -1$, bestämmer $y(x)$ för alla x. Finn x_0 så att $y(x_0) = 1$.

Lösning: Ekvationen är separabel. Man finner $(3y^2+1)y' = x^2$ och med integration $y^3 + y = \frac{x^3}{3} + C$, C konstant. $y(0) = -1$ ger $C = -2$, så $x^3 = 3(y^3 + y + 2)$. $y = 1$ ger $x^3 = 3 \cdot 4 = 12$.
Svar: Det sökta värdet är $x_0 = \sqrt[3]{12}$.

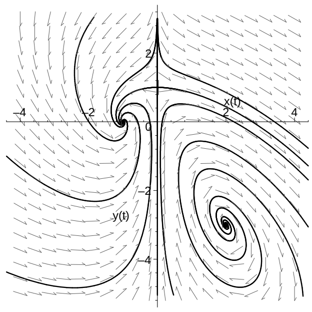


8. Finn alla kritiska punkter för följande autonoma system och bestäm för var och en av dem (om möjligt) dess typ och avgör dess stabilitet.

$$\begin{cases} x' = x(x+y+1) \\ y' = 1 - x^2 - y \end{cases}.$$

Lösning: De kritiska punkterna är lösningarna till ekvationssystemet $\begin{cases} x(x+y+1) = 0 \\ 1 - x^2 - y = 0 \end{cases}$. Den andra ekvationen säger att $y = 1 - x^2$ och då det sätts in i den första fås $x(2 + x - x^2)$, med lösningar $x = 0, 2, -1$. Med y enligt ovan fås de kritiska punkterna $(0,1)$, $(2,-3)$ och $(-1,0)$.

För att linearisera kring dem använder vi jacobimatrisen
$\mathbf{J}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+y+1 & x \\ -2x & -1 \end{pmatrix}$.



För $(x,y) = (0,1)$, $\mathbf{J}(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, med $\lambda_{1,2} = 2, -1$. Två reella egenvärden med olika tecken, så $(0,1)$ är en sadelpunkt (instabil).
P.s.s. $\mathbf{J}(2,-3) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$, karakteristisk ekvation $\lambda^2 - \lambda + 6 = 0$, egenvärden $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i\sqrt{\frac{23}{4}}$. Icke-reella egenvärden med $\text{Re}\lambda_{1,2} > 0$, så $(2,-3)$ är en instabil spiralpunkt.
Och $\mathbf{J}(-1,0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, karakteristisk ekvation $\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$, egenvärden $\lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{2}$. Icke-reella egenvärden med $\text{Re}\lambda_{1,2} < 0$, så $(-1,0)$ är en stabil spiralpunkt.
Svar: Kritiska punkter: $(0,1)$ (sadelpunkt, instabil), $(2,-3)$ (instabil spiralpunkt) och $(-1,0)$ (stabil spiralpunkt).

9. Finn $u(x,t)$ som uppfyller $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = \frac{\partial u}{\partial t}, & t \geq 0,\ 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \sin 3x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

Lösning: Variabelseparation. Vi söker en lösning av formen $u(x,t) = X(x)T(t)$ till ekvationen och randvillkoren. Ekvationen ger $X''T + XT = XT'$, dvs $\frac{X''}{X} + 1 = \frac{T'}{T}$. Eftersom ingen annan term innehåller x, måste $\frac{X''}{X}$ vara konstant, kalla den $-\lambda$, så $\frac{T'}{T} = 1 - \lambda$. Randvillkoren ger problemet $X'' + \lambda X = 0$, $X(0) = X(\pi) = 0$, vilket har lösningar (andra än 0) precis då $\lambda = n^2$, $n = 1, 2, \ldots$, nämligen $X_n(x) = a_n \sin nx$.
Motsvarande T-lösningar är $T_n(t) = b_n e^{(1-n^2)t}$.
Hela de separerade lösningarna är alltså $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = c_n \sin nx\, e^{(1-n^2)t}$.
Superposition ger allmänna lösningen $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx\, e^{(1-n^2)t}$.
Koefficienterna c_n bestäms av begynnelsevillkoret $u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx = \sin 3x$, $0 < x < \pi$. Tydligen $c_3 = 1$ och $c_n = 0$, $n \neq 3$, så:
Svar: Lösningen är $\boldsymbol{u(x,t) = \sin 3x\, e^{-8t}}$.

10. Funktionen $J_0(t)$, en s.k. besselfunktion, är en lösning $y(t)$ till $\begin{cases} ty'' + y' + ty = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0 \end{cases}$.
Visa att dess laplacetransform är $\mathcal{L}\{J_0(t)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$.
Utan bevis får användas att $\lim_{s\to\infty} sY(s) = y(0) = 1$.

Lösning: Eftersom $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$, $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$ och $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$, ger transformering av ekvationen för $y(t) = J_0(t)$ att $-\frac{d}{ds}(s^2Y(s) - s\cdot 1 - 0) + sY(s) - 1 - \frac{d}{ds}Y(s) = 0$, dvs $-s^2Y' - 2sY + 1 + sY - 1 - Y' = 0$, vilket kan formas om till $Y' + \frac{s}{s^2+1}Y = 0$. Den ekvationen har den integrerande faktorn $e^{\int \frac{s}{s^2+1}\,ds} = e^{\frac{1}{2}\ln(s^2+1)} = \sqrt{s^2+1}$ och ekvationen blir $(\sqrt{s^2+1}\,Y)' = 0$, så $Y(s) = \frac{A}{\sqrt{s^2+1}}$, A konstant. $\lim_{s\to\infty} sY(s) = 1$ ger att $A = 1$, så $\boldsymbol{\mathcal{L}\{J_0(t)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}}$**, saken är klar.**