KTH Matematik

Tentamen onsdagen den 10 januari 2007 för BD, M, P m.fl.
5B1206, Differentialekvationer I

Skrivtid: 14.00–19.00

Examinator: Bengt Ek, tel 790 6951.

Tillåtet hjälpmedel: "Mathematics Handbook for Science and Engineering" (BETA) av Råde, Westergren.

Uppgifterna 1–5 svarar mot var sin modul i kursen.
Av dessa uppgifter skall man bara lösa dem som svarar mot moduler man inte blivit godkänd på under kursens gång.
De bedöms med G (för godkänd) eller U (för underkänd).

Betygsgränser: Tentamen blir godkänd om och endast om minst 4 av 5 moduler är godkända.
Godkänd tentamen och 14–20p på uppgifterna 6–10 ger betyg 5 A.
Godkänd tentamen och 11–13p på uppgifterna 6–10 ger betyg 4 B.
Godkänd tentamen och 8–10p på uppgifterna 6–10 ger betyg 4 C.
Godkänd tentamen och 4–7p på uppgifterna 6–10 ger betyg 3 D.
Godkänd tentamen och 0–3p på uppgifterna 6–10 ger betyg 3 E.
3 godkända moduler (men inte 4) ger "betyg" K Fx (rätt till komplettering).

För att ge full poäng måste lösningarna vara ordentligt motiverade. Ange vad införda beteckningar som inte är standard står för.

1. Finn alla kritiska punkter och avgör deras stabilitet för differentialekvationen

$$y' = ((\tfrac{\pi}{4})^2 - (\arctan y)^2)e^y.$$

2. Differentialekvationen

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0,\ x > 0,$$

har en lösning $y_1(x) = x$. Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = -x,\ x > 0.$$

3. Låt $y(t)$ vara den lösning till differentialekvationen $y'' + 3y' + 2y = \delta(t-4)$ som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 3$, $y'(0) = 5$. Vad är $y(5)$?
$\delta(t)$ är Diracs deltafunktion.

4. Formulera den icke-linjära andra ordningens differentialekvationen

$$x'' - x(x')^2 + \sin x = 0$$

som ett plant första ordningens autonomt system och finn alla det systemets kritiska punkter.

5. Finn (fourier-)sinusserien för funktionen $f(x) = e^{-x},\ \ 0 < x < \pi$.
Vad konvergerar serien mot då $x = \frac{3\pi}{2}$?

V.g. vänd!

6. (4p) Två bassänger innehåller (salt)vatten, vardera med volymen V (liter). Mängderna salt i dem vid tiden t är $x_1(t)$ respektive $x_2(t)$ (kg).
Till bassäng 1 förs sötvatten med flödet r (l/min), från bassäng 1 förs (fullständigt blandat) vatten till bassäng 2 med ett lika stort flöde r och från bassäng 2 flödar (fullständigt blandat) vatten ut, också det med flödet r.
Vid tiden $t = 0$ är mängden salt i bassäng 1 a (kg), medan bassäng 2 innehåller rent sötvatten, dvs $x_1(0) = a,\ x_2(0) = 0$.
Hur mycket salt finns i varje bassäng när de innehåller lika mycket, dvs vad är $x_1(t_0)$ då t_0 är sådant att $x_1(t_0) = x_2(t_0)$?

7. (4p) Begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y' = \frac{x^2}{3y^2+1} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

bestämmer $y(x)$ för alla x. Finn x_0 så att $y(x_0) = 1$.

8. (4p) Finn alla kritiska punkter för följande autonoma system och bestäm för var och en av dem (om möjligt) dess typ och avgör dess stabilitet.

$$\begin{cases} x' = x(x + y + 1) \\ y' = 1 - x^2 - y \end{cases} .$$

9. (4p) Finn $u(x,t)$ som uppfyller

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = \frac{\partial u}{\partial t}, & t \geq 0,\ 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \sin 3x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

10. (4p) Funktionen $J_0(t)$, en s.k. besselfunktion, är en lösning $y(t)$ till

$$\begin{cases} ty'' + y' + ty = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0 \end{cases} .$$

Visa att dess laplacetransform är

$$\mathcal{L}\{J_0(t)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}.$$

Utan bevis får användas att $\lim_{s\to\infty} sY(s) = y(0) = 1$.

Lycka till!

Lösningar kommer att läggas ut på kurssidan.

En **kompletteringsskrivning** kommer att ordnas för de nästan godkända.

Information om tid, om sal och om vilka som får chans att komplettera kommer att finnas på kurssidan.