Tentamensskrivning i Differentialekvationer I, SF1633(5B1206).

Torsdagen den 23 oktober 2008, kl 0800-1300.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Del 1 är avsedd för betyg E och omfattar 4 uppgifter.
För betyg E krävs 4 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, A, B, C och D, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg A krävs förutom 4 godkända moduler även 15 poäng på del 2.
För betyg B krävs förutom 4 godkända moduler även 11 poäng på del 2.
För betyg C krävs förutom 4 godkända moduler även 7 poäng på del 2.
För betyg D krävs förutom 4 godkända moduler även 3 poäng på del 2.

De som har registrering på 5B1206 erhåller betyg enligt nedan.
Tentamen är tvådelad.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 4 uppgifter.
För betyg 3 krävs 4 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, 4 och 5, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg 4 krävs förutom 4 godkända moduler även 8 poäng på del 2.
För betyg 5 krävs förutom 4 godkända moduler även 14 poäng på del 2.
Uppgifterna 11-15 ger 4 poäng vardera.

<u>Del 1</u>
<u>Modul 1.</u>

I en populationsmodell är den <u>relativa</u> tillväxthastigheten, $\frac{1}{P(t)}\frac{dP}{dt}$, som funktion av antalet djur, $P(t)$, summan av två termer. Den ena är en positiv konstant, a, och den andra termen är proportionell mot antalet djur med proportionalitetskonstanten b. Ställ upp en matematisk modell för ovanstående.
Låt konstanterna därefter vara 5000 respektive 1 .
Bestäm populationen som funktion av tiden t då den vid tiden 0 år lika med 1000.

<u>Lösning:</u>

Låt populationen vid tiden t vara $P(t)$.

Differentialekvationen blir $\frac{1}{P(t)}\frac{dP}{dt} = a + bP(t)$, $\frac{dP}{dt} = aP + bP^2$.

Med de givna konstanterna insatta erhålles $\frac{dP}{dt} = 5000P \quad P^2$.

Differentialekvationen är av Bernoulli typ(den är även separabell).

Vi omformar differentialekvationen: $P^{\ 2}\frac{dP}{dt} = 5000P^{\ 1} \quad 1$.

Sätt $z = P^{\ 1}$, $\frac{dz}{dt} = \quad P^{\ 2}\frac{dP}{dt}$.

Insättning ger: $\frac{dz}{dt} = 5000z \quad 1$, $\frac{dz}{dt} + 5000z = 1$, vilken är linjär med konstanta koefficienter.

Dess lösning erhålles som allmän homogen lösning plus en partikulärlösning.

Vi erhåller $z = Be^{\ 5000t} + \frac{1}{5000} = \frac{Ae^{\ 5000t} + 1}{5000}$. Populationen är $P(t) = \frac{5000}{Ae^{\ 5000t} + 1}$.

Villkoret ger värdet på konstanten: $P(0) = \frac{5000}{A+1} = 1000$, $A = 4$.

SVAR: Populationen är $P(t) = \frac{5000}{4e^{\ 5000t} + 1}$.

<u>Modul 2.</u>

Bestäm $y(\frac{}{2})$ då $y \quad + 4y = 6 \ (t \quad \frac{}{4})$ och $y(0) = 1$ samt $y\ (0) = 2$.

<u>Lösning:</u>

Laplacetransformera :

$$s^2Y(s) \quad sy(0) \quad y\ (0) + 4Y(s) = 6e^{\ \frac{}{4}s}$$

Insättning av villkoret ger:

$$(s^2+4)Y(s)=s+2+6e^{\frac{\ }{4}s}$$

Lös ut den obekanta funktionens Laplacetransform

$$Y(s)=\frac{s}{s^2+4}+\frac{2}{s^2+4}+3\frac{2}{s^2+4}e^{\frac{\ }{4}s}$$

Återtransformering ger:

$$y(t)=\cos 2t+\sin 2\ \ t+3U(t\ \ \frac{\ }{4})\sin 2(t\ \ \frac{\ }{4})$$

Det sökta funktionsvärdet blir

$$y(\frac{\ }{2})=\cos\ \ +\sin\ \ +3U(\frac{\ }{2}\ \ \frac{\ }{4})\sin 2(\frac{\ }{2}\ \ \frac{\ }{4})=\ \ 1+0+3=2$$

SVAR: Det sökta funktionsvärdet blir $y(\frac{\ }{2})=2$.

Modul 3.

Bestäm $u(x,y)$ så att $\frac{u}{x}+\frac{u}{y}=u$ och $u(x,0)=3e^{x}+5e^{\ \ 2x}$.

Lösning:

Vi använder variabelseparation. $u(x,y)=X(x)Y(y)$.

Insättning i differentialekvationen ger: $X\ (x)Y(y)+X(x)Y\ (y)=X(x)Y(y)$.

Dividera med $X(x)Y(y)$.

$$\frac{X\ (x)}{X(x)}+\frac{Y\ (y)}{Y(y)}=1$$

$$\frac{X\ (x)}{X(x)}=\ \ \frac{Y\ (y)}{Y(y)}+1=\text{konstant}=$$

Vi får ett system av ordinära differentialekvationer vars lösningar vi skriver upp.

$$X\ (x)=\ \ X(x)\qquad X(x)=Ae^{\ \ x}$$

$$Y\ (y)=(1\ \ \ )Y(y)\qquad Y(y)=Be^{(1\ \ \ )y}$$

Vi får $u\ \ (x,y)=(AB)\ \ e^{\ \ x}e^{(1\ \ \ )y}=c\ \ e^{\ \ x+(1\ \ \ )y}$ för alla .

Vid hänsyn taget till villkoret $u(x,0)=3e^{x}+5e^{\ \ 2x}$ bildar vi följande linjärkombinationer av lösningar.

$$u(x,y)=c_1e^{\ _1x+(1\ \ _1)y}+c_2e^{\ _2x+(1\ \ _2)y}$$

Insättning av villkoret ger:

$$c_1e^{\ _1x}+c_2e^{\ _2x}=u(x,0)=3e^{x}+5e^{\ \ 2x}$$

En direkt identifiering ger $_1=1,\ c_1=3,\ \ _2=\ \ 2,\ c_2=5$.

Vi får $u(x,y)=3e^{x}+5e^{\ \ 2x+3y}$.

SVAR: Den sökta lösningen är $u(x,y)=3e^{x}+5e^{\ \ 2x+3y}$.

Modul 4.

Sök allmänna lösningen till $\mathbf{X}\ \ =\mathbf{AX}$, där $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix}$. Vad är hastighetsvektorn då $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}$?

Avgör även en partikels öde om den vid tiden $t=5$ befinner sig i punkten $(\ \ 2,4)$.

Lösning:

Vi börjar med att bestämma egenvärden och därefter egenvektorer till matrisen $\mathbf{A}$.

$$0=\det(\mathbf{A}\ \ \ \mathbf{I})=\begin{vmatrix}1\ \ & 1\\ 4 & 1\ \ \end{vmatrix}=(1\ \ \ )^2\ \ 4=(1\ \ \ +2)(1\ \ \ 2)=(3\ \ \ )(\ \ 1\ \ \ )$$

Egenvärdena blir $_1=3,\ \ _2=\ \ 1$. Bestäm motsvarande egenvektorer $\mathbf{K}$, där $(\mathbf{A}\ \ \ \mathbf{I})\mathbf{K}=\mathbf{0}$.

$\underline{\ _1=3}$

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}\mathbf{K}=\mathbf{0},\ \mathbf{K}=k_1\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix},\ \ k_1\ \ R.$$

$\underline{\ _2=\ \ 1}$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{K}=\mathbf{0}$, $\mathbf{K}=k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $k_2 \quad R$.

Motsvarande lösningar blir:

$\underline{\ _1=3}$: $\mathbf{X_1}=e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\underline{\ _2= \ 1}$ $\mathbf{X}_2=e^{\ t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Den allmänna lösningen erhålles som linjärkombinationer av $\mathbf{X_1}$ och $\mathbf{X}_2$.

$$\mathbf{X}=c_1\mathbf{X_1}+c_2\mathbf{X}_2=c_1e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}+c_2e^{\ t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{3t} & e^{\ t} \\ 2e^{3t} & 2e^{\ t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Hastighetsvektorn $\mathbf{X} \ = \mathbf{AX}$ för $\mathbf{X}=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ blir $\mathbf{X} \ =\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Observera att punkten $(\ 2,4)$ ligger på den räta linje vars riktningsvektor ges av $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Då t växer går partiklen mot origo.

SVAR: Den allmänna lösningen $\mathbf{X}=c_1e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}+c_2e^{\ t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{3t} & e^{\ t} \\ 2e^{3t} & 2e^{\ t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

Hastighetsvektorn $\mathbf{X} \ =\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Partikeln går mot origo då t växer obegränsat.

<u>Del 2</u>

11. Är följande påståenden, a-c, sanna eller falska? Motivera!

a) Differentialekvationen $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2=\dfrac{4 \ y^2}{4 \ x^2}$ har reella lösningar i området $\{(x,y): | \ x \ | <2, \ | \ y \ | >2\}$.

b) Låt $y= \ (x)$ vara en lösning till differentialekvationen $y \ +y^2+4=0$.

Vidare går lösningskurvan genom punkten $(1,1)$. Då går samma lösningskurva även genom punkten $(3,4)$.

c) Begynnelsevärdesproblemet $y \ =3y^{2/3}$, $y(0)=0$ har ej entydig lösning.

d) Bestäm ett värde på x_0 så att grafen till lösningskurvan för begynnelsevärdesproblemet $y \ +2y=3x \quad 6$, $y(x_0)=0$ tangerar x -axeln i punkten $(x_0,0)$. Bestäm därefter begynnelsevärdesproblemets lösning.

<u>Lösning:</u>

a) Falskt, ty V.L.≥ 0 medan H.L.< 0.

b) Falskt, ty $y \ = \ y^2 \quad 4<0$ innebär att lösningen är en avtagande funktion.

Denna kan inte gå genom punkten $(1,1)$ och punkten $(3,4)$.

c) Sant, ty två lösningar ges av $y=0$ och $y=x^3$.

d) Grafen till lösningskurvan tangerar x -axeln i punkten $(x_0,0)$ då $y \ (x_0,0)=0$.

Insättning i differentialekvationen ger: $0 \ +0=3x_0 \quad 6$, $x_0 \ =2$.

Den givna differentialekvationen är linjär av första ordningen .

Den allmänna lösningen erhålles som summan av allmänna homogena lösningen och en partikulär lösning.

Den allmänna homogena lösningen ges av $y_h=Ce^{\ 2x}$.

För att erhålla en partikulärlösning gör vi ansatsen $y_p=ax+b$.

Insättning i differentialekvationen ger: $a \ +2(ax+b)=3x \quad 6$.

Identifiering ger: $\begin{cases} x^1: 2a=3 \\ x^0: a+2b= \ 6 \end{cases}$, $\begin{cases} a=3/2 \\ b=(\ 6 \quad 3/2)/2= \ 15/4 \end{cases}$, $y_p=\dfrac{6x \quad 15}{4}$.

Allmänna lösningen ges av: $y=Ce^{\ 2x}+\dfrac{6x \quad 15}{4}$.

Bestäm konstanten. Villkoret ger $0=Ce^{\ 4}+\dfrac{12 \quad 15}{4}$, $C=\dfrac{3}{4}e^4$, $y=\dfrac{3}{4}e^{4 \ \ 2x}+\dfrac{6x \quad 15}{4}$.

SVAR: a) Falskt, b) Falskt c) Sant d) $x_0=2$ och $y=\dfrac{3}{4}e^{4 \ \ 2x}+\dfrac{6x \quad 15}{4}$.

12. Den allmänna lösningen till differentialekvationen $x^2 y \;\; + bxy \;\; + cy = f(x)$, $x > 0$
ges av $y = Ax^2 + Bx \;\; ^2 + x^4$. Bestäm differentialekvationen.

Lösning:

Den givna lösningen består av två delar.

Den allmänna homogena lösningen $y_h = Ax^2 + Bx \;\; ^2$ och en partikulärlösning $y_p = x^4$.

Vi utnyttjar först de homogena lösningarna för att bestämma konstanterna därefter kan $f(x)$ bestämmas.

Insättning av de två lösningarna i den homogena differentialekvationen ger: $\begin{array}{l} y_1 = x^2 \;\; : \;\; x^2 2 + bx2x + cx^2 = 0 \\ y_2 = x \;\; ^2 : \;\; x^2 6x \;\; ^4 + bx(\;\; 2x \;\; ^3) + cx \;\; ^2 = 0 \end{array}$.

Vi erhåller systemet: $\begin{array}{l} 2 + 2b + c = 0 \\ 6 \;\; 2b + c = 0 \end{array}$ vilket har lösningen $b = 1 \;\; c = \;\; 4$.

Vi får differentialekvationen $f(x) = x^2 y \;\; \square\!+\!\square y \;\; \square 4y$. Det återstår att bestämma funktionen $f(x)$.

Insättning av partikulärlösningen ger detta.

Vi får $f(x) = x^2 12x^2 + x4x^3 \;\; 4x^4 = 12x^4$.

SVAR: Den sökta differentialekvationen är $x^2 y \;\; + xy \;\; 4y = 12x^4$.

13. Ett tvådimensionellt hastighetsfält beskrivs av systemet

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + y^2 \quad 2$$

$$\frac{dy}{dt} = x^2 \quad y^2$$

Undersök de kritiska punkternas karaktär det vill säga undersök stabilitet/instabilitet samt ange typ.

Lösning:

Vi bestämmer först de stationära(kritiska) punkterna, där är hastighetsvektorn lika med nollvektorn.

Därefter linjariseras systemet med hjälp av Jacobianen.

De stationära punkterna insättes i Jacobianen och vi erhåller konstanta matriser vars egenvärden bestämmes.

Vi undersöker det linjära systemet med avseende på stabilitet/instabilitet samt typ.

Systemet $\begin{array}{l} 0 = x^2 + y^2 \;\; 2 \\ 0 = x^2 \;\; y^2 \end{array}$ har lösningarna (1,1), (1,-1), (-1,1) och (-1,-1).

Jacobianen $\mathbf{J} = \begin{array}{cc} 2x & 2y \\ 2x & 2y \end{array}$. Insättning av respektive punkter ger.

$\mathbf{J}(1,1) = \begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{array} = \mathbf{A}$, vars egenvärden fås ur ekvationen $0 = \begin{vmatrix} 2 \;\; & 2 \\ 2 & 2 \;\; \end{vmatrix} = \;\; 4 + \;\; ^2 \;\; 4$, $_{1,2} = \pm\sqrt{8}$

Skilda reella egenvärden ger sadelpunkt, vilken är instabil.

$\mathbf{J}(1, \;\; 1) = \begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{array} = \mathbf{B}$, vars egenvärden fås ur ekvationen $0 = \begin{vmatrix} 2 \;\; & 2 \\ 2 & 2 \;\; \end{vmatrix} = (2 \;\;)^2 + 4$, $_{1,2} = 2 \pm 2i$

Komplexa egenvärden med positiv realdel ger instabil spiral.

$\mathbf{J}(\;\; 1,1) = \begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{array} = \mathbf{C}$, vars egenvärden fås ur ekvationen $0 = \begin{vmatrix} 2 \;\; & 2 \\ 2 & 2 \;\; \end{vmatrix} = (2 + \;\;)^2 + 4$, $_{1,2} = \;\; 2 \pm 2i$

Komplexa egenvärden med negativ realdel ger stabil spiral.

$\mathbf{J}(\;\; 1, \;\; 1) = \begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{array} = \mathbf{D}$, vars egenvärden fås ur ekvationen $0 = \begin{vmatrix} 2 \;\; & 2 \\ 2 & 2 \;\; \end{vmatrix} = \;\; 4 + \;\; ^2 \;\; 4$, $_{1,2} = \pm\sqrt{8}$

Skilda reella egenvärden ger sadelpunkt, vilken är instabil.

Detsamma gäller även för det icke-linjära systemet.

SVAR: (1,1) sadelpunkt, vilken är instabil. (1,-1) instabil spiral. (-1,1) stabil spiral. (-1,-1) sadelpunkt, vilken är instabil.

14.a. Låt $f(t)$ vara styckvis kontinuerlig på $[0, \;\;)$ av exponentiell ordning och periodisk med perioden T .

Härled $f : s$ Laplacetransformation $F(s) = \dfrac{1}{1 \;\; e^{\;\; sT}} \int_0^T e^{\;\; st} f(t)dt$ utgående från definitionen på Laplacetransform.

b. Begynnelsevärdesproblemet $y \;\; + y = \;\; (t)$, $t > 0$, $y(0) = y \;\; (0) = 0$ beskriver en svängningskrets med en högfrekvent insignal (t) nämligen fyrkants-vågen $(t) = \begin{array}{l} 1 , \;\; 0 \;\; < t < \\ 0 , \;\;\;\; < t < 2 \end{array}$ och $(t + 2 \;\;) = \;\; (t)$, där är ett litet tal.

Lösningen $y(t)$ beror av , $y(t) = y \ (t)$. Bestäm gränsfunktionen $y_0(t) = \lim_{0} y \ (t)$.

<u>Ledning:</u> Gränsövergången kan med fördel göras på Laplacetransformsidan.

<u>Lösning:</u>

a. Laplacetransformen definieras som $F(s) = \ _0 \ e \ ^{st} f(t)dt$.

Dela upp integralen i två delar och gör därefter en substitution.

$$F(s) = \ _0 \ e \ ^{st} f(t)dt = \ _0^T e \ ^{st} f(t)dt + \ _T \ e \ ^{st} f(t)dt \qquad (1)$$

I den senare integralen görs substitutionen $u = t \quad T, \ du = dt$.

$$_T \ e \ ^{st} f(t)dt = \ _0 \ e \ ^{s(u+T)} f(u+T)du = e \ ^{sT} \ _0 \ e \ ^{su} f(u+T)du = \{f(u+T) = f(u)\} = e \ ^{sT} \ _0 \ e \ ^{su} f(u)du = e \ ^{sT} F(s)$$

Insättning i (1) ger $F(s) = \ _0^T e \ ^{st} f(t)dt + e \ ^{sT} F(s)$. Lös ut $F(s)$. Vi får $F(s) = \frac{1}{1 \ e \ ^{sT}} \ _0^T e \ ^{st} f(t)dt$. vsv.

b. Vi Laplacetransformerar differentialekvationen.

$$s^2 Y(s) \quad sy(0) \quad y \ (0) + Y(s) = L\{ \quad (t)\}$$

$$L\{ \quad (t)\} = \frac{1}{1 \ e \ ^{s2}} \ _0^2 \ e \ ^{st} \quad (t)dt = \frac{1}{1 \ e \ ^{s2}} \ _0 \ e \ ^{st} 1dt = \frac{1 \ e \ ^{s}}{s(1 \ e \ ^{s2} \ )} = \frac{1}{s(1 + e \ ^{s} \ )}$$

Insättning ger $s^2 Y(s) + Y(s) = \frac{1}{s(1+e \ ^{s} \ )}$.

Lös ut $Y(s)$ och gör därefter den aktuella gränsövergången.

$$Y(s) = \frac{1}{1+e \ ^{s}} \frac{1}{(s^2+1)s} \quad \frac{1}{2} \frac{1}{(s^2+1)s} = \frac{1}{2}(\frac{1}{s} \quad \frac{s}{s^2+1}) \ , \qquad 0$$

$$y_0(t) = L^{1} \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{s} \quad \frac{s}{s^2+1} \quad = \frac{1}{2}(1 \quad \cos t)$$

SVAR: a. Se ovan b. $y_0(t) = \frac{1}{2}(1 \quad \cos t)$.

15.a. Vad menas med att två funktioner är ortogonala på ett intervall $0 \quad t \quad L$

b. Undersök om följden $\{1, \cos t, \cos 2t, \cos 3t, ..., \cos nt, ...\}$ är ortogonal på intervallet $0 \quad t$.

c. Utveckla den reellvärda funktionen f på intervallet $0 \quad t$ i ovanstående följd.

d. Bestäm med hjälp av ovanstående $_0 \ (f(t))^2 \ dt$.

<u>Lösning:</u>

a. Två funktioner f och g är ortogonala på intervaller $0 \quad t \quad L$ då $_0^L f(t)g(t)dt = 0$.

b. Vi får $_0 \ 1\cos ntdt = \frac{\sin \quad \sin 0}{n} = 0$ och

$$_0 \cos mt \cos ntdt = \ _0 \ \frac{1}{2}(\cos(m \quad n)t + \cos(m+n)t)dt = \{m \quad n\} \frac{1}{2} \ \frac{\sin(m \quad n) \quad \sin 0}{m \quad n} + \frac{\sin(m+n) \quad \sin 0}{m+n} \quad = 0 .$$

Följden är ortogonal.

c. Vi ansätter $f(t) = c \ \ 1 + \ _{n=1} a_n \cos nt$.

Integration över det aktuella intervallet och utnyttjande av ortogonaliteten ger följande resultat $_0 \ f(t)dt = c \quad , \ c = \frac{1}{} \ _0 \ f(t)dt$.

Multiplicera ansatsen med $\cos mt$ och integrera över det aktuella intervallet.

Utnyttjandet av ortogonaliteten ger $_0 \ f(t)\cos mtdt = a_m \ _0 \cos mt \cos mtdt = a_m \ _0 \ \frac{1+\cos 2mt}{2} dt = a_m \frac{}{2}$

Vi får $a_n = \frac{2}{} \ _0 \ f(t) \cos ntdt$,

d. $_0 \ (f(t))^2 dt = \ _0 \ \ c \ \ 1 + \ _{n=1} a_n \cos nt (\ c \ \ 1 + \ _{m=1} a_m \cos mt (\ dt$

Ortogonaliteten ger att de enda bidrag som erhålles är vid $_0 \ c^2 dt$ och

$0 \qquad {}_{n=1} a_n \cos nt \qquad {}_{m=1} a_m \cos mt \ \ dt$ då $m = n$.

Vi får $_0 \left(f(t)\right)^2 dt = c^2 \quad + \frac{}{2} \quad {}_{n=1} a_n^2$.

SVAR: a och b se ovan. c. $f(t) = c \ \ 1 + \quad {}_{n=1} a_n \cos nt$, $c = \frac{1}{} \ {}_0 f(t) dt$, $a_n = \frac{2}{} \ {}_0 f(t) \cos nt dt$.

d. $_0 \left(f(t)\right)^2 dt = c^2 \quad + \frac{}{2} \quad {}_{n=1} a_n^2$.