**Tentamensskrivning i Differentialekvationer I, SF1633(5B1206).**

Torsdagen den 23 oktober 2008, kl 0800-1300.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Del 1 är avsedd för betyg E och omfattar 4 uppgifter.
För betyg E krävs 4 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, A, B, C och D, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg A krävs förutom 4 godkända moduler även 15 poäng på del 2.
För betyg B krävs förutom 4 godkända moduler även 11 poäng på del 2.
För betyg C krävs förutom 4 godkända moduler även 7 poäng på del 2.
För betyg D krävs förutom 4 godkända moduler även 3 poäng på del 2.

De som har registrering på 5B1206 erhåller betyg enligt nedan.
Tentamen är tvådelad.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 4 uppgifter.
För betyg 3 krävs 4 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, 4 och 5, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg 4 krävs förutom 4 godkända moduler även 8 poäng på del 2.
För betyg 5 krävs förutom 4 godkända moduler även 14 poäng på del 2.
Uppgifterna 11-15 ger 4 poäng vardera.

<u>Del 1</u>

<u>Modul 1.</u>

I en populationsmodell är den <u>relativa</u> tillväxthastigheten, $\frac{1}{P(t)}\frac{dP}{dt}$, som funktion av antalet djur, $P(t)$, summan av två termer. Den ena är en positiv konstant, $a$, och den andra termen är proportionell mot antalet djur med proportionalitetskonstanten $b$. Ställ upp en matematisk modell för ovanstående.
Låt konstanterna därefter vara 5000 respektive $-1$.
Bestäm populationen som funktion av tiden $t$ då den vid tiden 0 år lika med 1000.

<u>Modul 2.</u>

Bestäm $y(\frac{\pi}{2})$ då $y'' + 4y = 6\delta(t - \frac{\pi}{4})$ och $y(0) = 1$ samt $y'(0) = 2$.

<u>Modul 3.</u>

Bestäm $u(x,y)$ så att $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u$ och $u(x,0) = 3e^{x} + 5e^{-2x}$.

<u>Modul 4.</u>

Sök allmänna lösningen till $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$, där $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Vad är hastighetsvektorn då $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$?

Avgör även en partikels öde om den vid tiden $t = 5$ befinner sig i punkten $(-2, 4.)$

vgv

Del 2

11. Är följande påståenden, a-c, sanna eller falska? Motivera!

a) Differentialekvationen $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{4-y^2}{4-x^2}$ har reella lösningar i området $\{(x,y) : |x| < 2 , \ |y| > 2\}$.

b) Låt $y = \Phi(x)$ vara en lösning till differentialekvationen $y' + y^2 + 4 = 0$.
Vidare går lösningskurvan genom punkten $(1,1)$. Då går samma lösningskurva även genom punkten $(3, 4)$.

c) Begynnelsevärdesproblemet $y' = 3y^{2/3}, \ y(0) = 0$ har ej entydig lösning.

d) Bestäm ett värde på $x_0$ så att grafen till lösningskurvan för begynnelsevärdesproblemet $y' + 2y = 3x - 6 \quad , y(x_0) = 0$ tangerar $x$ -axeln i punkten $(x_0, 0)$. Bestäm därefter begynnelsevärdesproblemets lösning.

12. Den allmänna lösningen till differentialekvationen $x^2y'' + bxy' + cy = f(x) \quad , x > 0$ ges av $y = Ax^2 + Bx^{-2} + x^4$ . Bestäm differentialekvationen.

13. Ett tvådimensionellt hastighetsfält beskrivs av systemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 + y^2 - 2 \\ \frac{dy}{dt} = x^2 - y^2 \end{cases}$$

Undersök de kritiska punkternas karaktär det vill säga undersök stabilitet/instabilitet samt ange typ.

14.a. Låt $f(t)$ vara styckvis kontinuerlig på $[0, \infty)$ av exponentiell ordning och periodisk med perioden $T$.
Härled $f$ :s Laplacetransformation $F(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)dt$ utgående från definitionen på Laplacetransform.

b. Begynnelsevärdesproblemet $y'' + y = \Phi_\varepsilon(t) \quad , t > 0 \ , y(0) = y'(0) = 0$ beskriver en svängningskrets med en högfrekvent insignal $\Phi_\varepsilon(t)$ nämligen fyrkants-vågen $\Phi_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & , 0 < t < \varepsilon \\ 0 & , \varepsilon < t < 2\varepsilon \end{cases}$ och $\Phi_\varepsilon(t + 2\varepsilon) = \Phi_\varepsilon(t)$,
där $\varepsilon$ är ett litet tal.
Lösningen $y(t)$ beror av $\varepsilon$ , $y(t) = y_\varepsilon(t)$ . Bestäm gränsfunktionen $y_0(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} y_\varepsilon(t)$ .

Ledning: Gränsövergången kan med fördel göras på Laplacetransformsidan.

15.a. Vad menas med att två funktioner är ortogonala på ett intervall $0 \le t \le L$

b. Undersök om följden $\{1, \cos t, \cos 2t, \cos 3t, ...., \cos nt, ...\}$ är ortogonal på intervallet $0 \le t \le \pi$ .

c. Utveckla den reellvärda funktionen $f$ på intervallet $0 \le t \le \pi$ i ovanstående följd.

d. Bestäm med hjälp av ovanstående $\int_0^\pi \left(f(t)\right)^2 dt$ .