Kompletteringstentamen i Differentialekvationer I, SF1633(5B1206).

Måndagen den 17 november 2008, kl 0900-1000.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Modul 1.

Lös $\begin{cases} ty' = y^2 + y \\ y(1) = -2 \end{cases}$, med angivande av maximalt lösningsintervall.

Lösning:
Den givna differentialekvationen är separabel (Även Bernoullsk.)
De två konstantlösningarna $y = 0$ och $y = -1$ uppfyller ej villkoret.

Omformning av differentialekvationen ger: $\dfrac{1}{y(y+1)}y' = \dfrac{1}{t}$.

Partialbråksuppdelning ger: $(\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{y+1})y' = \dfrac{1}{t}$.

Integrera map t: $\ln|y| - \ln|y+1| = \ln|t| + \ln|C_1|$, $\ln\left|\dfrac{y}{y+1}\right| = \ln|C_1 t|$, $\dfrac{y}{y+1} = \pm C_1 t = Ct$.

Villkoret $y(1) = -2$ ger: $C = 2$. $y = 2t(y+1)$, $y = \dfrac{2t}{1-2t}$, där $1 - 2t \neq 0$.

Det maximala lösningsintervallet blir $\left\{ t:\ t > \dfrac{1}{2} \right\}$.

SVAR: Den sökta lösningen är $y = \dfrac{2t}{1-2t}$ och det maximala lösningsintervallet $\left\{ t:\ t > \dfrac{1}{2} \right\}$.

Modul 2.

Lös ekvationen $y'(t) + \int_0^t e^{-\tau} y(t-\tau)\,d\tau = e^{-t}, \quad t > 0$ med begynnelsevärdet $y(0) = 0$.

Lösning:

Laplacetransformera: $sY(s) - 0 + \dfrac{1}{s+1}Y(s) = \dfrac{1}{s+1}$

Lös ut $Y(s)$: $Y(s)(s(s+1)+1) = 1$, $Y(s) = \dfrac{1}{s^2+s+1} = \dfrac{1}{(s+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \dfrac{\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$.

Återtransformera: $y(t) = \dfrac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{t}{2}} \sin\dfrac{t\sqrt{3}}{2}$.

SVAR: Den sökta lösningen är $y(t) = \dfrac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{t}{2}} \sin\dfrac{t\sqrt{3}}{2}$.

Modul 3.

Undersök om $f_1(x) = x$ och $f_2(x) = x^2$ är ortogonala på intervallet $(-2, 2)$. Bestäm därefter konstanterna c_1 och c_2 så att $f_3(x) = x + c_1 x^2 + c_2 x^3$ blir ortogonal mot både f_1 och f_2 på samma intervall.

Lösning:
Vi undersöker om funktionerna är ortogonala genom att först bestämma den inre produkten mellan dessa.
Om den inre produkten är lika med noll så är funktionerna ortogonala.

$\langle f_1(x), f_2(x) \rangle = \int_{-2}^{2} f_1(x) f_2(x)\,dx = \int_{-2}^{2} x x^2\,dx = \int_{-2}^{2} x^3\,dx = 0$, ty udda funktion och origosymmetriskt intervall.

Den inre produkten är lika med noll och således är funktionerna ortogonala.
Vi skall bilda ett ortogonalt system med hjälp av funktionerna f_1, f_2 och f_3.

Inre produkten mellan f_1 och f_3 lika med noll ger: $0 = \langle f_1(x), f_3(x)\rangle = \int_{-2}^{2} f_1(x) f_3(x)\,dx = \int_{-2}^{2} x(x + c_1x^2 + c_2x^3)\,dx$

Inre produkten mellan f_2 och f_3 lika med noll ger: $0 = \langle f_2(x), f_3(x)\rangle = \int_{-2}^{2} f_2(x) f_3(x)\,dx = \int_{-2}^{2} x^2(x + c_1x^2 + c_2x^3)\,dx$

Vi erhåller följande system: $\begin{cases} 0 = 2\left(\dfrac{2^3}{3} + c_2\dfrac{2^5}{5}\right) \\ 0 = 2\left(c_1\dfrac{2^5}{5}\right) \end{cases}$ $\begin{cases} c_2 = -\dfrac{5}{12} \\ c_1 = 0 \end{cases}$.

$f_3(x) = x - \frac{5}{12}x^3$ är ortogonal mot de givna funktionerna.

SVAR: $f_1(x) = x$ och $f_2(x) = x^2$ är ortogonala på intervallet $(-2, 2)$ $c_1 = 0$ och $c_2 = -\frac{5}{12}$.

<u>Modul 4.</u>
Funktionerna $y_1(x) = x,\ y_2(x) = x + 3x^2,\ y_3(x) = 5x^3 + 4x,\ y_4(x) = x^2 + x + x^3$ och $y_5(x) = 7x + 3x^2 + 4x^3$ är lösningar till en linjär tredje ordningens homogen differentialekvation på intervallet $\{x : x > 0\}$.
Bestäm en fundamentalmängd av lösningar till differentialekvationen.
Bestäm även den lösning som uppfyller villkoren $y(1) = 3,\ y'(1) = 6$ och $y''(1) = 8$.
<u>Lösning:</u>
En linjär tredje ordningens homogen differentialekvation har tre linjärt oberoende lösningar och dessa bildar en bas för lösningsrummet. Av de fem givna lösningarna väljes en lämplig kombination av lösningar ut så de blir linjärt oberoende.
Tag till exempel följande: $y(x) = x$, $y(x) = x^2$ och $y(x) = x^3$.
För att visa att dessa lösningar är linjärt oberoende visar vi att Wronskianen är skilt från noll.

$$W(x,\ x^2,\ x^3) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = 12x^3 + 0 + 2x^3 - 0 - 6x^3 - 6x^3 = 2x^3 > 0$$

En fundamental lösningsmängd är $\{x,\ x^2,\ x^3\}$.
Den allmänna lösningen kan skrivas $y = C_1x + C_2x^2 + C_3x^3$.
Det återstår att bestämma den lösning som uppfyller de givna villkoren.
Bilda första- och andraderivatan.
$y' = C_1 + C_2 2x + C_3 3x^2$ och $y'' = C_2 2 + C_3 6x$.

Insättning av villkoren ger: $\begin{cases} 3 = y(1) = C_1 + C_2 + C_3 \\ 6 = y'(1) = C_1 + C_2 2 + C_3 3 \\ 8 = y''(1) = C_2 2 + C_3 6 \end{cases}$.

Systemet har lösningen $C_1 = 1$, $C_2 = 1$, $C_3 = 1$. Den sökta lösningen är $y = x + x^2 + x^3$.

SVAR: En fundamentalmängd av lösningar är $\{x,\ x^2,\ x^3\}$.
Den lösning som uppfyller de givna villkoren är $y = x + x^2 + x^3$.