Tentamensskrivning i Differentialekvationer I, SF1633(5B1206).
Webbaserad kurs i differentialekvationer I, SF1656.
Torsdagen den 8 januari 2009, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Del 1 är avsedd för betyg E och omfattar 4 uppgifter.
För betyg E krävs 4 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, A, B, C och D, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg A krävs förutom 4 godkända moduler även 15 poäng på del 2.
För betyg B krävs förutom 4 godkända moduler även 11 poäng på del 2.
För betyg C krävs förutom 4 godkända moduler även 7 poäng på del 2.
För betyg D krävs förutom 4 godkända moduler även 3 poäng på del 2.

De som har registrering på 5B1206 erhåller betyg enligt nedan.
Tentamen är tvådelad.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 4 uppgifter.
För betyg 3 krävs 4 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, 4 och 5, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg 4 krävs förutom 4 godkända moduler även 8 poäng på del 2.
För betyg 5 krävs förutom 4 godkända moduler även 14 poäng på del 2.
Uppgifterna 11-15 ger 4 poäng vardera.

Del 1

Modul 1.

I en befolkningsmodell för ett samhälle antas att hastigheten varmed befolkningsmängden, $P(t)$, förändras är beroende av differensen mellan födelse- och dödshastigheten.
Födelsehastigheten är proportionell mot befolkningsmängden medan dödshastigheten är proportionell mot kvadraten på befolkningsmängden. Ställ upp ovanstående modell i form av en differentialekvation. Analysera därefter modellen kvalitativt med proportionalitetskonstanterna lika med tre och ett i nämnd ordning.

Modul 2.

Lös differentialekvationen $y'' + 9y = f(t)$, där $f(t) = 9$, $1 \le t \le 2$ och noll för övrigt
vidare skall begynnelsevillkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 3$ vara uppfyllda.

Modul 3.

Uttryck den 2π -periodiska funktionen f i en fourierserie då $f(t) = t^2,\ -\pi < t < \pi$.

Bestäm med hjälp av denna fourierserie summan $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Modul 4.

Bestäm alla kritiska punkter till systemet $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(5 - x - y) \\ y(-2 + x) \end{pmatrix}$.

Klassificera de eventuella kritiska punkterna med avseende på typ och stabilitet.

vgv

Del 2

11.

a) Låt $y = y_1(x)$ vara en icke-trivial lösning till differentialekvationen $y' + P(x)y = 0$.
Härled en partikulärlösning till differentialekvationen $y' + P(x)y = f(x)$.

b) Bestäm en kontinuerlig lösning till begynnelsevärdesproblemet $y' + P(x)y = 4x \quad , y(0) = 3$,

där $P(x) = \begin{cases} 2 \quad , \quad 0 \le x \le 1 \\ -\dfrac{2}{x} \quad , x > 1 \end{cases}$.

12. Bestäm alla lösningar på formen $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ till differentialekvationen $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$,
i de fall där "r-ekvationen" har lösningar på formen Cr^p, p en reell konstant.

13.a. Härled en partikulärlösning till det linjära system $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}$, då en fundamentalmatris ges av Φ.

b. Bestäm allmänna lösningen till systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\cos t} \\ 0 \end{pmatrix}$, då $-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$.

14. Härled utgående från definitionen Laplacetransformationen för funktionen $f_h(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{h} \quad , a \le t \le a+h \\ 0 \quad , t < a \;,\; t > a+h \end{cases}$.

Benämn denna transformation $L\{f_h(t)\}$. Låt $h \to 0$, d v s bestäm gränsvärdet $\lim_{h \to 0} L\{f_h(t)\}$.

Lös slutligen begynnelsevärdesproblemet $y'' + 4y' + 8y = f(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, då $f(t) = \lim_{h \to 0} f_h(t)$.

15. Kreatinin är en restprodukt vid ämnesomsättningen i muskelvävnader. Kroppen gör sig av med produkten genom utsöndring i urinen. Redan vid en liten nedsättning av njurfunktionen höjs halten av kreatinin patologiskt. Man planerar att göra försök med hundar på vilka man tänker injicera en större dos kreatinin. Dosen väljs så stor att vävnadernas nyproduktion av ämnet kan försummas jämfört med den injicerade dosen. För att få en bild av hur utsöndringen beror av njurfunktionen tänker man sig nu, att blod och muskelvävnader är två kärl, mellan vilka kreatininet kan diffundera. Från blodet diffunderar ämnet dessutom ut i urinen via njurarna med en hastighet som är proportionell mot koncentrationen av kreatinin i blodet. Antag att diffusionshastigheten är proportionell mot skillnaden i koncentrationen av kreatininet i respektive kärl. Låt $c_b(t)$ och $c_m(t)$ vara koncentrationerna i blod respektive muskler som funktioner av tiden samt låt k och l vara diffusionskoefficienterna mellan blod/muskler respektive blod/urin.
Ställ upp motsvarande matematiska modell.

Visa att denna har lösningen $\begin{pmatrix} c_m \\ c_b \end{pmatrix} = A_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + A_2\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}$, där A_1, A_2, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, λ_1 och λ_2 är *reella*.

Ange också λ_1 och λ_2 som funktioner av k och l samt visa att de är *olika* och negativa.