Lösningsförslag till tentamen den 25 maj i kursen Differentialekvationer I, SF1633 (5B1206).

Del 1

Modul 1
Bestäm en funktion $y(x)$ som uppfyller att

$$y'(x) = xe^{y-x^2}$$

och där $y(0) = 0$. Svaret ska vara förenklat så långt som möjligt.

Lösning. Diffekvationen är separabel, vi skriver därför $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ och får

$$\frac{dy}{dx} = xe^{-x^2}e^y,$$

vilket förenklas till

$$\int e^{-y}\,dy = \int xe^{-x^2}\,dx.$$

Beräkning av de båda integralerna ger oss sambandet

$$e^{-y} = \frac{e^{-x^2}}{2} + C,$$

vilket efter logaritmering av båda led ger $-y = \ln\left(\frac{e^{-x^2}}{2} + C\right)$. Vi stoppar in att vi vet att $y(0) = 0$ och detta ger $0 = -y(0) = \ln(1/2 + C)$, så $1/2 + C = 1$, varför $C = 1/2$.

Svar: $y(x) = -\ln\left(\frac{e^{-x^2}+1}{2}\right)$

Modul 2
Funktionen $y(t)$ uppfyller att $y(0) = 1$ och att

$$y'(t) - 9y(t) = u(t-2)e^t,$$

där $u(t)$ är Heaviside-funktionen. Vad är $y(3)$? Svaret ska vara förenklat så långt som möjligt.

Lösning. Vi skriver e^t som e^2e^{t-2}. Då vi Laplacetransformerar båda led får vi $\mathscr{L}(y'(t) - 9y(t)) = \mathscr{L}(e^2u(t-2)e^{t-2})$, vilket med hjälp av lineariteten hos Laplacetransformen kan skrivas som

$$\mathscr{L}(y'(t)) - 9\mathscr{L}(y(t)) = e^2\mathscr{L}(u(t-2)e^{t-2}).$$

Med hjälp av formlerna för Laplacetransformen av en derivata och Laplacetransformen av en förskjuten funktion förenklas detta till

$$sY(s) - y(0) - 9Y(s) = e^2e^{-2s}\mathscr{L}(e^t) = e^2\frac{e^{-2s}}{s-1}.$$

Vi stoppar in att $y(0) = 1$ och löser ut $Y(s)$, detta ger

$$Y(s) = \frac{1}{s-9} + e^2 \frac{e^{-2s}}{(s-1)(s-9)}.$$

Partialbråksuppdelning ger

$$\frac{1}{(s-1)(s-9)} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{s-9} - \frac{1}{s-1}\right)$$

och med hjälp av detta kan uttrycket ovan förenklas till

$$Y(s) = \frac{1}{s-9} + \frac{e^2}{8}\frac{e^{-2s}}{s-9} - \frac{e^2}{8}\frac{e^{-2s}}{s-1}.$$

Återtransformering ger, med hjälp av lineariteten hos inversen till Laplacetransformen, att

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-9}\right) + \frac{e^2}{8}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2s}}{s-9}\right) - \frac{e^2}{8}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2s}}{s-1}\right) \\ &= e^{9t} + \frac{e^2}{8}u(t-2)e^{9(t-2)} - \frac{e^2}{8}u(t-2)e^{t-2} \end{aligned}$$

Stoppar man in $t = 3$ får man $y(3) = e^{27} + \frac{e^2}{8}e^9 - \frac{e^2}{8}e^1 = e^{27} + \frac{e^{11}}{8} - \frac{e^3}{8}$.
Svar: $e^{27} + \frac{1}{8}e^{11} - \frac{1}{8}e^3$.

Modul 3
Bestäm en funktion $u(x, y)$ sådan att $u(x, 0) = 2 + 5e^{-6x}$ och där

$$3\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Lösning. Vi söker efter produktlösningar till ekvationen, dvs vi ansätter att $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Instoppat i ekvationen ger detta

$$3X'(x)Y(y) + X(x)Y'(y) = 0,$$

som också kan skrivas som

$$3\frac{X'(x)}{X(x)} = -\frac{Y'(y)}{Y(y)}.$$

Eftersom vänsterledet inte beror av y och högerledet inte beror av x, men vänsterledet är lika med högerledet, kan de båda leden varken vara beroende av x eller y. Med andra ord är alltså båda leden lika med en konstant λ. Stoppar man inte detta får man ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3X'(x) = \lambda X(x) \\ -Y'(y) = \lambda Y(y) \end{cases}.$$

Eftersom lösningarna är olika för olika λ skriver vi lösningarna som $X_\lambda(x)$ och $Y_\lambda(y)$. Den första diffekvationen har lösningarna $X_\lambda(x) = A_\lambda e^{\lambda x/3}$ och den andra har lösningarna $Y_\lambda(y) = B_\lambda e^{-\lambda y}$ så vi har produktlösningarna

$$u_\lambda(x, y) = X_\lambda(x)Y_\lambda(y) = C_\lambda e^{\lambda x/3}e^{-\lambda y},$$

där $C_\lambda = A_\lambda B_\lambda$. Vi vill nu hitta en lösning till ekvationen som dessutom uppfyller att $u(x,0) = 2 + 5e^{-6x}$. Vi ser att $u_\lambda(x,0) = C_\lambda e^{\lambda x/3}$ och detta kan aldrig bli $2 + 5e^{-6x}$. Men eftersom vår ekvation är linjär och homogen kan vi bilda linjärkombinationer av de lösningar vi hittat och få nya lösningar. Vi vet alltså till exempel att uttryck på formen $u(x,y) = u_{\lambda_1}(x,y) + u_{\lambda_2}(x,y)$ också är lösningar. Stoppa in $y = 0$ i detta uttryck och jämför med $2 + 5e^{-6x}$, vi får

$$C_{\lambda_1} e^{\lambda_1 x/3} + C_{\lambda_2} e^{\lambda_2 x/3} = 2 + 5e^{-6x}.$$

Detta stämmer för alla x om vi väljer $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -18, C_{\lambda_1} = 2$ och $C_{\lambda_2} = 5$. Stoppar vi in detta i uttrycket för $u(x,y)$ får vi $u(x,y) = 2 + 5e^{-6x+18y}$.

Svar: $u(x,y) = 2 + 5e^{-6x+18y}$.

Modul 4

Visa att $y_1(x) = e^{x^2}$ och $y_2(x) = e^{-x^2}$ bildar en fundamentalmängd av lösningar till diffekvationen

$$xy'' - y' - 4x^3 y = 0$$

på intervallet $x > 0$.

Lösning. Eftersom antalet givna funktioner (2 stycken) är lika med ordningen av diffekvationen behöver vi bara visa dels att y_1 och y_2 är lösningar, dels att de är linjärt oberoende. Vi deriverar de båda funktionerna två gånger och får $y_1'(x) = 2xe^{x^2} = 2xy_1(x)$ och $y_1''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2} = (2 + 4x^2)y_1(x)$, respektive $y_2'(x) = -2xe^{-x^2} = -2xy_2(x)$ och $y_2''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2} = (-2 + 4x^2)y_2(x)$. Alltså är $xy_1''(x) - y_1'(x) - 4x^3 y_1(x) = x(2 + 4x^2)y_1(x) - 2xy_1(x) - 4x^3 y_1(x) = 0$ och $xy_2''(x) - y_2'(x) - 4x^3 y_2(x) = x(-2 + 4x^2)y_2(x) + 2xy_2(x) - 4x^3 y_2(x) = 0$, vilket visar att y_1 och y_2 är lösningar till ekvationen. För att visa att y_1 och y_2 är linjärt oberoende kan man till exempel beräkna Wronskianen till y_1 och y_2. Denna är

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{x^2} & e^{-x^2} \\ 2xe^{x^2} & -2xe^{-x^2} \end{vmatrix} = -4x$$

Eftersom $-4x \neq 0$ så måste y_1 och y_2 vara linjärt oberoende.

Del 2

11. Bestäm allmänna lösningen till

$$2x^2y''(x) - xy'(x) - 2y(x) = 13x^6$$

på intervallet $x > 0$. Dra nytta av att $y(x) = x^2$ uppfyller att

$$2x^2y''(x) - xy'(x) - 2y(x) = 0.$$

(4 p)

Lösning. Eftersom vi känner till att $y(x) = x^2$ är en homogen lösning till vår ekvation kan vi lösa ekvationen med hjälp av reduktion av ordning. Denna metod bygger på ansatsen $y(x) = y_1(x)u(x)$ där $y_1(x)$ är den kända homogena lösningen, i vårt fall $y_1(x) = x^2$, och $u(x)$ är den okända, eftersöka funktionen. Vi får alltså $y(x) = x^2u(x)$, vilket ger $y'(x) = 2xu(x) + x^2u'(x)$ och $y''(x) = 2u(x) + 2xu'(x) + 2xu'(x) + x^2u''(x)$. Instoppat i ekvationen ger detta

$$\begin{aligned} &2x^2y''(x) - xy'(x) - 2y(x) \\ &\qquad = 2x^2\left(2u(x) + 4xu'(x) + x^2u''(x)\right) - x\left(2xu(x) + x^2u'(x)\right) - 2x^2u(x) \\ &\qquad = 7x^3u'(x) + 2x^4u''(x) = 13x^6. \end{aligned}$$

Vi inför $v(x) = u'(x)$, i denna nya funktion $v(x)$ är ekvationen $7x^3v(x) + 2x^4v'(x) = 13x^6$, och detta är en linjär diffekvation av första ordningen, sådana kan lösas med hjälp av integrerande faktor. Dela hela ekvationen med $2x^4$, vi får

$$v'(x) + \frac{7}{2x}v(x) = \frac{13x^2}{2}.$$

En integrerande faktor är $I(x) = e^{\int \frac{7}{2x}\,dx} = e^{\frac{7}{2}\ln x} = x^{7/2}$ och därför kan ekvationen skrivas som

$$\left(v(x)x^{7/2}\right)' = \left(v'(x) + \frac{7}{2x}v(x)\right)x^{7/2} = \frac{13x^2}{2}x^{7/2} = \frac{13x^{11/2}}{2}.$$

Vi integrerar båda led och får $v(x)x^{7/2} = x^{13/2} + C$, varför $u'(x) = v(x) = x^3 + Cx^{-7/2}$. Integration av detta ger $u(x) = \frac{x^4}{4} + Dx^{-5/2} + E$, där $D = -2C/5$. Alltså är $y(x) = x^2u(x) = Ex^2 + Dx^{-1/2} + \frac{x^6}{4}$.

Svar: $y(x) = Ex^2 + Dx^{-1/2} + \frac{x^6}{4}$.

12. Vilka av följande beskrivningar bestämmer $y(x)$ entydigt i en omgivning till $x = 0$? Ge bevis eller motexempel.

a) $y(x)$ uppfyller $y(0) = 0$ och $2xy'(x) = y(x)$.

(2 p)

b) $y(x)$ uppfyller $y(0) = 0$ och $y''(x) = y(x)$.

(1 p)

c) $y(x)$ uppfyller $y(0) = 0$ och

$$e^xy'(x) = e^{y^2}\sin x - \frac{1}{y^2+1}.$$

(1 p)

Lösning. Ekvationen i 12 a) är en linjär diffekvation av första ordningen, dessa kan lösas med hjälp av integrerande faktor. Om vi löser ekvationen på intervallet $x > 0$ får vi integrerande faktorn till

$$e^{\int -\frac{dx}{2x}} = e^{-\frac{\ln x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

så lösningarna blir $y(x) = C\sqrt{x}$. Alla dessa lösningar uppfyller att $y(0) = 0$. Däremot är funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ inte deriverbar i $x = 0$, så den enda verkliga lösningen till ekvationen i en omgivning till $x = 0$ är den man får för $C = 0$, dvs vi får den entydiga lösningen $y(x) \equiv 0$.

Ekvationen i 12 b) kan lösas med hjälp av karakteristiska ekvationen och har lösningarna $y(x) = Ae^{x} + Be^{-x}$. Sätter vi in att $y(0) = 0$ får vi $0 = y(0) = A + B$, dvs $B = -A$, vilket ger lösningarna $y(x) = A\left(e^{x} - e^{-x}\right)$. Men oavsett vad A är blir detta lösningar som uppfyller att $y(0) = 0$ så inte heller denna ekvation med detta begynnelsevärde bestämmer $y(x)$ entydigt.

Ekvationen i 12 c) kan skrivas $y'(x) = f(x, y)$, där

$$f(x, y) = e^{-x}\left(e^{y^2}\sin x - \frac{1}{y^2+1}\right).$$

Denna funktion är kontinuerlig och dess derivata med avseende på y är också kontinuerlig. Enligt sats i boken gäller nu att det finns en unik funktion som löser begynnelsevärdesproblemet givet av $y(0) = 0$ i ett intervall kring $x = 0$, så alltså bestämmer detta funktionen $y(x)$ entydigt.

13. Bestäm allmänna lösningen till systemet

$$\begin{cases} x'(t) = & -x(t) + y(t) + e^{t} \\ y'(t) = & -x(t) - 3y(t) + 1 \end{cases}.$$

(4 p)

Lösning. I matrisnotation ges problemet av

$$X'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} e^{t} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi börjar med att lösa det homogena systemet

$$X_h'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} X_h(t).$$

Egenvärdena till $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ ges av

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+3) + 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2 = 0.$$

Alltså är $\lambda = -2$ ett dubbelt egenvärde. Vi söker egenvektorer till $\lambda = -2$, dessa ges av ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -3-\lambda & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

som har lösningarna $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Alltså är $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ en egenvektor och vi har hittat en homogen lösning $X_h(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}$. För att hitta en till måste vi nu hitta en vektor som löser ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1-\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -3-\lambda & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{array}\right),$$

en sådan vektor är till exempel $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Vi får nu en annan lösning genom $X_h(t) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) e^{-2t} = \begin{pmatrix} t+1 \\ -t \end{pmatrix} e^{-2t}$, alltså är allmänna lösningen till det homogena systemet

$$X_h(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{pmatrix} t+1 \\ -t \end{pmatrix} e^{-2t}.$$

Fundamentalmatrisen $\Phi(t)$ ges därför av

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t+1 \\ -1 & -t \end{pmatrix} e^{-2t},$$

som har inversen

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} -t & -t-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

En lösning till systemet ges av

$$\begin{aligned} X_p(t) &= \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t) \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \end{pmatrix} dt = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 & t+1 \\ -1 & -t \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} -t & -t-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} dt \\ &= e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 & t+1 \\ -1 & -t \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} -te^{3t} - te^{2t} - e^{2t} \\ e^{3t} + e^{2t} \end{pmatrix} dt \\ &= e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 & t+1 \\ -1 & -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-3t}{9} e^{3t} + \frac{1-2t}{4} e^{2t} - \frac{e^{2t}}{2} \\ \frac{e^{3t}}{3} + \frac{e^{2t}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t+1 \\ -1 & -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-3t}{9} e^t - \frac{1+2t}{4} \\ \frac{e^t}{3} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1-3t}{9} e^t - \frac{1+2t}{4} + (t+1)\left(\frac{e^t}{3} + \frac{1}{2}\right) \\ -\frac{1-3t}{9} e^t + \frac{1+2t}{4} - t\left(\frac{e^t}{3} + \frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} e^t + \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{9} e^t + \frac{1}{4} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Allmänna lösningen är därför

$$X(t) = X_h(t) + X_p(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{pmatrix} t+1 \\ -t \end{pmatrix} e^{-2t} + \frac{e^t}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Svar: $X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{pmatrix} t+1 \\ -t \end{pmatrix} e^{-2t} + \frac{e^t}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

14. a) Visa att diffekvationen $4ty'' + 2y' + y = 0$ har den allmänna lösningen

$$y(t) = A \cos \sqrt{t} + B \sin \sqrt{t}$$

på intervallet $t \geqslant 0$.

(2 p)

14. b) Använd detta för att bevisa att

$$\mathscr{L}(\sin\sqrt{t}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{e^{-\frac{1}{4s}}}{s^{3/2}}.$$

Utan bevis får du använda att

$$\int_0^\infty e^{-t}\sin\sqrt{t}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{1}{4}}.$$

(2 p)

Lösning. **Bevis av 14 a):** Vi vet att allmänna lösningen till en andraordningens homogen linjär diffekvation är på formen $y(t) = Ay_1(t) + By_2(t)$, där y_1 och y_2 är två linjärt oberoende lösningar till ekvationen. Vi behöver därför bara visa, dels att $y(t) = A\cos\sqrt{t} + B\sin\sqrt{t}$ är lösningar och dels att $\cos\sqrt{t}$ och $\sin\sqrt{t}$ är linjärt oberoende. Vi beräknar första- och andra-derivatorna till y :

$$y'(t) = \left(-A\sin\sqrt{t} + B\cos\sqrt{t}\right)\frac{1}{2\sqrt{t}}$$

och

$$y''(t) = \left(-A\cos\sqrt{t} - B\sin\sqrt{t}\right)\frac{1}{4t} + \left(-A\sin\sqrt{t} + B\cos\sqrt{t}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{t^{3/2}}.$$

Stoppar vi in detta i ekvationen får vi

$$\begin{aligned}4ty'' + 2y' + y &= \left(-A\cos\sqrt{t} - B\sin\sqrt{t}\right) + \left(A\sin\sqrt{t} - B\cos\sqrt{t}\right)\frac{1}{\sqrt{t}} \\ &+ \left(-A\sin\sqrt{t} + B\cos\sqrt{t}\right)\frac{1}{\sqrt{t}} + A\cos\sqrt{t} + B\sin\sqrt{t} = 0\end{aligned}$$

så $y(t)$ är lösningar. Wronskianen av $\cos\sqrt{t}$ och $\sin\sqrt{t}$ är

$$W(\cos\sqrt{t}, \sin\sqrt{t}) = \begin{vmatrix}\cos\sqrt{t} & \sin\sqrt{t} \\ -\frac{\sin\sqrt{t}}{2\sqrt{t}} & \frac{\cos\sqrt{t}}{2\sqrt{t}}\end{vmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{t}}\left((\cos\sqrt{t})^2 + \sin\sqrt{t})^2\right) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \neq 0$$

så funktionerna är linjärt oberoende. Detta visar påståendet.

Bevis av 14 b): Vi vet att $y(t) = \sin\sqrt{t}$ uppfyller att $4ty'' + 2y' + y = 0$ enligt a)-uppgiften. Laplacetransformerar vi denna ekvation får vi

$$-4\frac{d(s^2Y(s) - y'(0) - sy(0))}{ds} + 2(sY(s) - y(0)) + Y(s) = 0,$$

vilket förenklas till $-4(s^2Y'(s) + 2sY(s) - y(0)) + (2s+1)Y(s) - 2y(0)) = 0$, som ger $-4s^2Y'(s) + (1-6s)Y(s) + 2y(0) = 0$. Vi vet också att $y(t) = \sin\sqrt{t}$ uppfyller att $y(0) = 0$ så vi får att $-4s^2Y'(s) + (1-6s)Y(s) = 0$, vilket också kan skrivas som

$$Y'(s) + \frac{6s-1}{4s^2}Y(s) = 0.$$

Integrerande faktorn är

$$I(s) = e^{\int \frac{6s-1}{4s^2}ds} = e^{\frac{3}{2}\ln s - \frac{1}{4s}} = \frac{s^{3/2}}{e^{\frac{1}{4s}}}$$

så vi får att

$$\left(Y(s) \frac{s^{3/2}}{e^{\frac{1}{4s}}} \right)' = 0.$$

Detta ger

$$Y(s) = C\frac{e^{-\frac{1}{4s}}}{s^{3/2}}$$

och enligt uppgiften gäller att integralen (som inte är något annat än $Y(1)$) är $\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{1}{4}}$ och detta ger $C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Alltså är

$$\mathscr{L}(\sin\sqrt{t}) = Y(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{e^{-\frac{1}{4s}}}{s^{3/2}}$$

och det var det som skulle bevisas.

15. a) Vad menas med att funktionerna f och g är ortogonala på intervallet $[0, 1]$?

(1 p)

15. b) Antag att f är en kontinuerlig funktion som är ortogonal mot $g(x) = x^3$ på intervallet $[0, 1]$. Visa att det finns ett $x_0 \in [0, 1]$ sådant att $f(x_0) = 0$.

(3 p)

Lösning. Funktionerna f och g sägs vara ortogonala på intervallet $[0, 1]$ då

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx = 0.$$

Bevis av 15 b): Om funktionen f är identiskt lika med noll finns uppenbarligen ett $x_0 \in [0, 1]$ sådant att $f(x_0) = 0$ så då är vi klara. Annars finns en punkt x_1 där $x_1^3 f(x_1) \neq 0$. Om det gäller att $x^3 f(x)$ har samma tecken för alla $x \in [0, 1]$, måste även integralen ha detta tecken. Men integralen av $x^3 f(x)$ är noll, eftersom x^3 och $f(x)$ är ortogonala, så alltså måste $x^3 f(x)$ bli både positivt och negativt. Fast x^3 är alltid positivt så det måste vara $f(x)$ som blir både positivt och negativt. Enligt satsen om mellanliggande värde antar en kontinuerlig funktion alla tal mellan två funktionsvärden; eftersom f är kontinuerlig och antar ett positivt och ett negativt värde på $[0, 1]$ måste det då också anta det mellanliggande värdet 0, dvs det finns ett $x_0 \in [0, 1]$ sådant att $f(x_0) = 0$.