Tentamen i kursen Differentialekvationer I, SF1633 (5B1206).

Måndagen den 25 maj, klockan 14:00-19:00

Tillåtna hjälpmedel: Beta, Mathematics Handbook

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa. Svaren skall ges på reell form.

Del 1 är avsedd för betyg E och omfattar 4 uppgifter. För betyg E krävs 4 godkända moduler. Del 2 är avsedd för högre betyg, A, B, C, och D, och omfattar totalt 20 poäng.

För betyg A krävs förutom 4 godkända moduler även 15 poäng på del 2.
För betyg B krävs förutom 4 godkända moduler även 11 poäng på del 2.
För betyg C krävs förutom 4 godkända moduler även 7 poäng på del 2.
För betyg D krävs förutom 4 godkända moduler även 3 poäng på del 2.

De som har registrering på 5B1206 erhåller betyg enligt nedan. Tentamen är tvådelad. Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 4 uppgifter. För betyg 3 krävs 4 godkända moduler. Del 2 är avsedd för högre betyg, 4 och 5, och omfattar totalt 20 poäng.

För betyg 5 krävs förutom 4 godkända moduler även 14 poäng på del 2.
För betyg 4 krävs förutom 4 godkända moduler även 8 poäng på del 2.

Del 1

Modul 1
Bestäm en funktion $y(x)$ som uppfyller att

$$y'(x) = xe^{y-x^2}$$

och där $y(0) = 0$. Svaret ska vara förenklat så långt som möjligt.

Modul 2
Funktionen $y(t)$ uppfyller att $y(0) = 1$ och att

$$y'(t) - 9y(t) = u(t-2)e^t,$$

där $u(t)$ är Heaviside-funktionen. Vad är $y(3)$? Svaret ska vara förenklat så långt som möjligt.

Modul 3
Bestäm en funktion $u(x, y)$ sådan att $u(x, 0) = 2 + 5e^{-6x}$ och där

$$3\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Modul 4
Visa att $y_1(x) = e^{x^2}$ och $y_2(x) = e^{-x^2}$ bildar en fundamentalmängd av lösningar till diffekvationen

$$xy'' - y' - 4x^3y = 0$$

på intervallet $x > 0$.

Del 2

11. Bestäm allmänna lösningen till

$$2x^2y''(x) - xy'(x) - 2y(x) = 13x^6$$

på intervallet $x > 0$. Dra nytta av att $y(x) = x^2$ uppfyller att

$$2x^2y''(x) - xy'(x) - 2y(x) = 0.$$

(4 p)

12. Vilka av följande beskrivningar bestämmer $y(x)$ entydigt i en omgivning till $x = 0$? Ge bevis eller motexempel.

a) $y(x)$ uppfyller $y(0) = 0$ och $2xy'(x) = y(x)$.

(2 p)

b) $y(x)$ uppfyller $y(0) = 0$ och $y''(x) = y(x)$.

(1 p)

c) $y(x)$ uppfyller $y(0) = 0$ och

$$e^x y'(x) = e^{y^2}\sin x - \frac{1}{y^2+1}.$$

(1 p)

13. Bestäm allmänna lösningen till systemet

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t) + e^t \\ y'(t) = -x(t) - 3y(t) + 1 \end{cases}.$$

(4 p)

14. a) Visa att diffekvationen $4ty'' + 2y' + y = 0$ har den allmänna lösningen

$$y(t) = A\cos\sqrt{t} + B\sin\sqrt{t}$$

på intervallet $t \geqslant 0$.

(2 p)

14. b) Använd detta för att bevisa att

$$\mathscr{L}(\sin\sqrt{t}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{e^{-\frac{1}{4s}}}{s^{3/2}}.$$

Utan bevis får du använda att

$$\int_0^\infty e^{-t}\sin\sqrt{t}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{1}{4}}.$$

(2 p)

15. a) Vad menas med att funktionerna f och g är ortogonala på intervallet $[0,1]$?

(1 p)

15. b) Antag att f är en kontinuerlig funktion som är ortogonal mot $g(x) = x^3$ på intervallet $[0,1]$. Visa att det finns ett $x_0 \in [0,1]$ sådant att $f(x_0) = 0$.

(3 p)