Lösningsförslag till tentamensskrivning i Differentialekvationer I, SF1633(5B1206).
Torsdagen den 18 augusti 2009, kl 1400-1900.
Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Del 1 är avsedd för betyg E och omfattar 4 uppgifter.
För betyg E krävs 4 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, A, B, C och D, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg A krävs förutom 4 godkända moduler även 15 poäng på del 2.
För betyg B krävs förutom 4 godkända moduler även 11 poäng på del 2.
För betyg C krävs förutom 4 godkända moduler även 7 poäng på del 2.
För betyg D krävs förutom 4 godkända moduler även 3 poäng på del 2.

De som har registrering på 5B1206 erhåller betyg enligt nedan.
Tentamen är tvådelad.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 4 uppgifter.
För betyg 3 krävs 4 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, 4 och 5, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg 4 krävs förutom 4 godkända moduler även 8 poäng på del 2.
För betyg 5 krävs förutom 4 godkända moduler även 14 poäng på del 2.
Uppgifterna 11-15 ger 4 poäng vardera.

Del 1

Modul 1.

Funktionen $x(t)$ uppfyller $x' = x(2-x)(4-x)$, $x(0) = x_0$.
Undersök om gränsvärdet $\lim_{t\to\infty} x(t)$ existerar samt beräkna detta för varje initialvärde x_0.

Lösning:
Vi bestämmer först de kritiska punkterna. Där är derivatan lika med noll.
De stationära(kritiska) punkterna är $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ och $x_3 = 4$.
En teckenstudie av derivatan ger information rörande funktionens utseende.
$x > 4$: $x' > 0$ x växer.
$2 < x < 4$: $x' < 0$ x avtar.
$0 < x < 2$: $x' > 0$ x växer.
$x < 0$: $x' < 0$ x avtar.
Gränsvärdet existerar för varje initialvärde x_0 mellan 0 och 4.
Vi erhåller följande gränsvärden:
$0 < x_0 < 4$: $\lim_{t\to\infty} x(t) = 2$, $x_0 = 4$: $\lim_{t\to\infty} x(t) = 4$ och $x_0 = 0$: $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

SVAR: Gränsvärdet existerar enligt följande:
$0 < x_0 < 4$: $\lim_{t\to\infty} x(t) = 2$, $x_0 = 4$: $\lim_{t\to\infty} x(t) = 4$ och $x_0 = 0$: $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Modul 2.

Bestäm en funktion f som satisfierar ekvationen $f(t) = \cos 3t + \int_0^t e^{-\tau} f(t-\tau)\,d\tau$.

Lösning:
Laplacetransformera ekvationen: $F(s) = \dfrac{s}{s^2+9} + \dfrac{1}{s+1}F(s)$. Lös ut $F(s)$: $F(s) = \dfrac{s}{s^2+9}\dfrac{s+1}{s} = \dfrac{s+1}{s^2+9}$.

Omforma före återtransformation: $F(s) = \dfrac{s}{s^2+9} + \dfrac{1}{3}\dfrac{3}{s^2+9}$.

Återtransformera: $f(t) = \cos 3t + \dfrac{1}{3}\sin 3t$.

SVAR: Den sökta funktionen ges av $f(t) = \cos 3t + \dfrac{1}{3}\sin 3t$.

Modul 3.

Bestäm en funktion $u(x,y)$ som uppfyller differentialekvationen $x\frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ och villkoret $u(x,0) = 7x^4 + 2$.

Lösning:

Vi ansätter $u(x,y) = X(x)Y(y)$. Insättning i differentialekvationen ger $xX'(x)Y(y) - 2X(x)Y'(y) = 0$.

Dividera med $u(x,y) = X(x)Y(y)$. Då erhålles $\frac{xX'(x)}{2X(x)} = \frac{Y'(y)}{Y(y)} = \lambda = \text{konstant}$.

Den partiella differentialekvationen övergår i ett system av ordinära differentialekvationer.

$$\begin{cases} xX'(x) = 2\lambda X(x) \\ Y'(y) = \lambda Y(y) \end{cases}$$

Vi skriver upp systemets lösningar $\begin{cases} X(x) = Ax^{2\lambda} \\ Y(y) = Be^{\lambda y} \end{cases}$.

Lösningar till den partiella differentialekvationen är på formen $u_\lambda(x,y) = Ax^{2\lambda}Be^{\lambda y} = Cx^{2\lambda}e^{\lambda y}$ för varje $\lambda \in R$.

Även linjärkombinationer av lösningar är lösning till den partiella differentialekvationen.

På grund av det aktuella villkoret ansätter vi $u(x,y) = C_1x^{2\lambda_1}e^{\lambda_1 y} + C_2x^{2\lambda_2}e^{\lambda_2 y}$.

Insättning av villkoret ger $u(x,0) = C_1x^{2\lambda_1} + C_2x^{2\lambda_2} = 7x^4 + 2$ vilken ger $C_1 = 7,\ \lambda_1 = 2,\ C_2 = 2,\ \lambda_2 = 0$.

SVAR: Den sökta lösningen är $u(x,y) = 7x^4e^{2y} + 2$.

Modul 4.

Bestäm alla kritiska punkter till systemet $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(5 - x - y) \\ y(-2 + x) \end{pmatrix}$.

Klassificera de eventuella kritiska punkterna med avseende på typ och stabilitet.

Lösning:

I de kritiska punkterna är tangentvektorn lika med nollvektorn.

Vi erhåller följande system $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(5 - x - y) \\ y(-2 + x) \end{pmatrix} = \mathbf{f}(x,y)$.

Detta har lösningarna $(0,0)$, $(5,0)$ och $(2,3)$.

För att klassificera dessa punkter använder vi oss av Jacobimatrisen i den aktuella punkten.

Jacobimatrisen är lika med $\frac{\partial\ \mathbf{f}}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 5 - 2x - y & -x \\ y & -2 + x \end{pmatrix}$.

Vi sätter in de tre kritiska punkterna och erhåller därvid följande matriser.

$\underline{(0,0)}$

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Egenvärdena är reella och med olika tecken.

Den kritiska punkten är en sadelpunkt och därmed instabil.

$\underline{(5,0)}$

$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Egenvärdena är reella och med olika tecken.

Den kritiska punkten är en sadelpunkt och därmed instabil.

$\underline{(2,3)}$

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Vi tecknar egenvärdena: $0 = \det(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 6 = (\lambda + 1)^2 + 5$.

Egenvärdena är komplexa och lika med $\lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{5}$. Den kritiska punkten är en stabil spiralpunkt.

Det linjära respektive det icke-linjära systemet uppför sig på samma sätt i dessa fall.

SVAR: Kritiska punkter: $(0,0)$ och $(5,0)$ är sadelpunkter och instabila, $(2,3)$ är en stabil spiralpunkt.

Del 2

11. Låt T vara temperaturen hos en kaka och T_0 vara rummets temperatur. Antag att Newtons avsvalningslag gäller dvs att avsvalningshastigheten är proportionell mot temperaturdifferensen, $T - T_0$. Rumstemperaturen är 20°C och kakan tas ut från en ugn med temperaturen 220°C. Efter 5 minuter är kakans temperatur 120°C.
Bestäm kakans temperatur efter 20 minuter.

Lösning:

Enligt Newtons avsvalningslag gäller: $\frac{dT}{dt} = k(T - T_0)$ vilken har lösningen $T - T_0 = Ce^{kt}$.

Bestäm integrationskonstanten C samt proportionalitetskonstanten k.

$$\begin{cases} T(0) = 220 & 220 - 20 = C \\ T(5) = 120 & 120 - 20 = Ce^{k5} \end{cases} \quad \begin{cases} C = 200 \\ e^{k5} = \frac{100}{200} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad k = \frac{1}{5}\ln\frac{1}{2} \quad T = 20 + 200e^{-t\frac{1}{5}\ln 2} = 20 + 200(2)^{-\frac{t}{5}}$$

Efter 20 minuter är temperaturen $T(20) = 20 + 200(2)^{-\frac{20}{5}} = 20 + \frac{25}{2} = 32.5$.

SVAR: Kakans temperatur är efter 20 minuter 32.5 °C.

12. Definiera begreppet fundamental lösningsmängd. Bestäm en fundamental lösningsmängd till differentialekvationen $y'' + 3y' + 2y = 0$. Bestäm även allmänna lösningen till differentialekvationen $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}$.

Lösning:

En fundamental lösningsmängd till en linjär differentialekvation av ordning n består av n linjärt oberoende lösningar till differentialekvationen.

Den karakteristiska ekvationen till $y'' + 3y' + 2y = 0$ är $r^2 + 3r + 2 = 0$, $(r+1)(r+2) = 0$.

Rötterna är $r_1 = -1$ och $r_2 = -2$. Lösningar är e^{-x} respektive e^{-2x}. Vi visar att de är linjärt oberoende genom att visa att Wronskianen är skilt från noll. $W(e^{-x},\ e^{-2x}) = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -e^{-3x} \neq 0$.

En fundamental lösningsmängd är $\{ e^{-x},\ e^{-2x} \}$.

Nu över till den allmänna lösningen till den inhomogena differentialekvationen $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}$.

Den allmänna lösningen ges av allmänna homogena lösningen plus en partikulärlösning.
Här utnyttjar vi att en fundamental lösningsmängd är bestämd.
Allmänna homogena lösningen spänns upp av $\{ e^{-x},\ e^{-2x} \}$. Vi har $y_h = Ae^{-x} + Be^{-2x}$.
För att bestämma en partikulärlösning använder vi variation av parameter.
Ansätt $y_p = u(x)e^{-x} + v(x)e^{-2x}$.

Metoden variation av parameter ger oss följande system: $\begin{pmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{1+e^x} \end{pmatrix}$.

Vi löser systemet med hjälp av Cramer´s regel.
$$\begin{cases} u' = \frac{1}{-e^{-3x}} \begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \\ \frac{1}{1+e^x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = \frac{e^x}{1+e^x} \\ v' = \frac{1}{-e^{-3x}} \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & \frac{1}{1+e^x} \end{vmatrix} = -\frac{e^{2x}}{1+e^x} = -\left(e^x - \frac{e^x}{1+e^x}\right) \end{cases}$$

Integrera map x: $\begin{cases} u = \ln(1+e^x) \\ v = -\left(e^x - \ln(1+e^x)\right) \end{cases}$.

Partikulärlösningen blir $y_p = e^{-x}\ln(1+e^x) - \left(e^x - \ln(1+e^x)\right)e^{-2x}$.

Den allmänna lösningen är $y = Ae^{-x} + Be^{-2x} + e^{-x}\ln(1+e^x) - \left(e^x - \ln(1+e^x)\right)e^{-2x}$,

vilket efter förenkling blir $y = Ce^{-x} + Be^{-2x} + (e^{-x} + e^{-2x})\ln(1+e^x)$.

SVAR: En fundamental lösningsmängd till en linjär differentialekvation av ordning n består av n linjärt oberoende lösningar till differentialekvationen. En fundamental lösningsmängd är $\left\{ e^{-x},\ e^{-2x} \right\}$.

Den allmänna lösningen $y = Ce^{-x} + Be^{-2x} + (e^{-x} + e^{-2x})\ln(1+e^x)$.

13. Laplacetransformen ges av $L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ under lämpliga villkor.

Vilka av följande påståenden är korrekta? Bevis eller motexempel krävs.

a) $L\{t^2\} = \{L\{t\}\}^2$ b) $L\{2t\} = 2L\{t\}$

c) $L\{t+t^2\} = L\{t\}L\{t^2\}$ d) $L\{t+t^2\} = L\{t\} + L\{t^2\}$

e) f är styckvis kontinuerlig för $t \geq 0$ och av exponentiell ordning. $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$ där $F(s) = L\{f(t)\}$.

<u>Lösning:</u>

a) FALSKT, ty $L\{t^2\} = \frac{2}{s^3}$ är skilt ifrån $\{L\{t\}\}^2 = \left\{\frac{1}{s^2}\right\}^2 = \frac{1}{s^4}$.

b) SANT , ty $L\{2t\} = \int_0^\infty 2te^{-st}dt = 2\int_0^\infty te^{-st}dt = 2L\{t\}$.

c) FALSKT, ty $L\{t+t^2\} = L\{t\} + L\{t^2\} = \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s^3} \neq \frac{1}{s^2}\frac{2}{s^3} = L\{t\}L\{t^2\}$.

d) SANT, ty $L\{t+t^2\} = \int_0^\infty (t+t^2)e^{-st}dt = \int_0^\infty te^{-st}dt + \int_0^\infty t^2e^{-st}dt = L\{t\} + L\{t^2\}$.

e) SANT, ty

$\left|L\{f(t)\}\right| = \left|\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt\right| \leq \int_0^\infty |f(t)|e^{-st}dt$. f är av exponentiell ordning innebär att $|f(t)| \leq Me^{ct}$.

$\left|L\{f(t)\}\right| \leq \int_0^\infty Me^{ct}e^{-st}dt = M\int_0^\infty e^{-(s-c)t}dt = M\left[\frac{e^{-(s-c)t}}{-(s-c)}\right]_0^\infty = M\frac{1}{s-c}$, $s > c$.

Låt $s \to \infty$: $\left|L\{f(t)\}\right| \to 0$ $L\{f(t)\} \to 0$. VSV

SVAR: a) och c) är falska, b), d) och e) är sanna.

14. P är en två gånger deriverbar funktion som uppfyller $P(0) = P'(0) = 0$. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + P'(x)y' + P''(x)y = P''(x)$ som uppfyller villkoren $y(0) = 2$ och $y'(0) = 0$.

<u>Lösning:</u>

Den givna differentialekvationen kan skrivas $y'' + (P'(x)y)' = P''(x)$.

Integrera med avseende på x : $y' + P'(x)y = P'(x) + C_1$. Villkoren ger $C_1 = 0$.

Vår differentialekvation är linjär av första ordningen och har formen $y' + P'(x)y = P'(x)$.

Bestäm en integrerande faktor och multiplicera differentialekvationen med denna.

<u>En</u> integrerande faktor ges av $e^{\int P'(x)dx} = e^{P(x)}$; $e^{P(x)}y' + e^{P(x)}P'(x)y = e^{P(x)}P'(x)$.

Omformning ger: $(e^{P(x)}y)' = e^{P(x)}P'(x)$. Integrera med avseende på x : $e^{P(x)}y = e^{P(x)} + C_2$.

Villkoren ger: $C_2 = 1$ vilket insatt i ekvatonen ger $y = 1 + e^{-P(x)}$.

SVAR: Den sökta lösningen ges av $y = 1 + e^{-P(x)}$.

15.a) Visa att $\{\sin nx\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ utgör en mängd av ortogonala funktioner på intervallet $[0,\pi]$.

15.b) Skriv funktionen $f(x) = \sin^3 x$ på intervallet $[0,\pi]$ som en linjärkombination av lämpliga ortogonala funktioner ovan.

15.c) Antag att funktionen $f(x) = x^2 + 1$, $0 < x < 3$ är utvecklad i följande tre serier: en Fourierserie, en cosinusserie och en sinusserie. Ange det värde mot vilket respektive serie konvergerar mot för $x = 0$.

Lösning:

a) Vi visar att den inre produkten mellan två godtyckliga funktioner i den givna mängden är lika med noll på det givna intervallet.

$$\langle \sin nx, \sin mx \rangle = \int_0^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\cos(nx - mx) - \cos(nx + mx))dx = \{n \neq m\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n-m)x}{n-m} - \frac{\sin(n+m)x}{n+m}\right]_0^{\pi} = 0 .$$

b) Här gäller det att beskriva $f(x) = \sin^3 x$ med hjälp av den givna funktionsföljden.

En väg att göra detta är att ansätta $\sin^3 x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$, multiplicera med $\sin mx$ och integrera över intervallet $[0,\pi]$.

En betydligt kortare väg är att utnyttja formeln $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

Den sökta linjärkombinationen blir: $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$.

c) Respektive serie kommer att konvergera mot $\dfrac{f(0+) + f(0-)}{2}$.

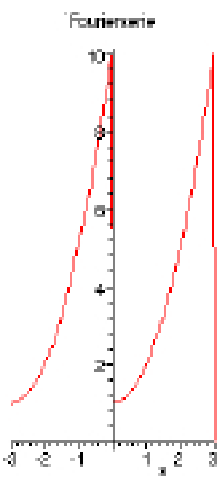
I fallet med Fourierserien blir detta: $\dfrac{0^2 + 1 + 3^2 + 1}{2} = \dfrac{11}{2}$.

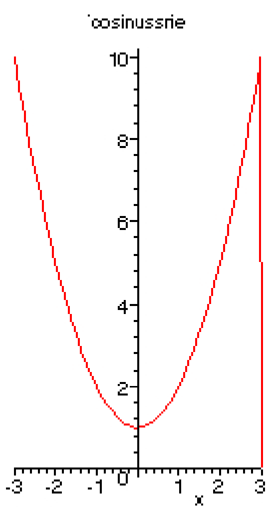
I fallet med cosinusserien blir detta: $\dfrac{0^2 + 1 + 0^2 + 1}{2} = 1$.

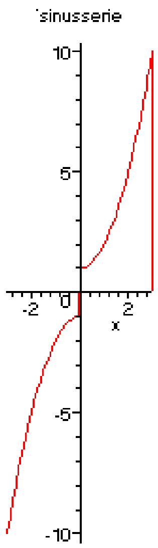
I fallet med sinusserien blir detta: $\dfrac{0^2 + 1 - (0^2 + 1)}{2} = 0$.

SVAR: a) Se ovan. b) $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$. c) $\dfrac{11}{2}$, 1 respektive 0.

Nedan följer plottar på de tre fallen.






sinusserie
10
5
-2
0
2
x
-5
-10