Tentamensskrivning i Differentialekvationer I, SF1633(5B1206).
Torsdagen den 18 augusti 2009, kl 1400-1900.
Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Del 1 är avsedd för betyg E och omfattar 4 uppgifter.
För betyg E krävs 4 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, A, B, C och D, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg A krävs förutom 4 godkända moduler även 15 poäng på del 2.
För betyg B krävs förutom 4 godkända moduler även 11 poäng på del 2.
För betyg C krävs förutom 4 godkända moduler även 7 poäng på del 2.
För betyg D krävs förutom 4 godkända moduler även 3 poäng på del 2.

De som har registrering på 5B1206 erhåller betyg enligt nedan.
Tentamen är tvådelad.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 4 uppgifter.
För betyg 3 krävs 4 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, 4 och 5, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg 4 krävs förutom 4 godkända moduler även 8 poäng på del 2.
För betyg 5 krävs förutom 4 godkända moduler även 14 poäng på del 2.
Uppgifterna 11-15 ger 4 poäng vardera.

Del 1

Modul 1. Funktionen $x(t)$ uppfyller $x' = x(2-x)(4-x)$, $x(0) = x_0$.
Undersök om gränsvärdet $\lim_{t\to\infty} x(t)$ existerar samt beräkna detta för varje initialvärde x_0.

Modul 2 Bestäm en funktion f som satisfierar ekvationen $f(t) = \cos 3t + \int_0^t e^{-\tau} f(t-\tau)\,d\tau$.

Modul 3 Bestäm en funktion $u(x,y)$ som uppfyller differentialekvationen $x\frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ och villkoret $u(x,0) = 7x^4 + 2$.

Modul 4. Bestäm alla kritiska punkter till systemet $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(5-x-y) \\ y(-2+x) \end{pmatrix}$.

Klassificera de eventuella kritiska punkterna med avseende på typ och stabilitet.

Del 2

11. Låt T vara temperaturen hos en kaka och T_0 vara rummets temperatur.
Antag att Newtons avsvalningslag gäller dvs att avsvalningshastigheten är proportionell mot temperaturdifferensen, $T - T_0$.
Rumstemperaturen är 20°C och kakan tas ut från en ugn med temperaturen 220°C.
Efter 5 minuter är kakans temperatur 120°C.
Bestäm kakans temperatur efter 20 minuter.

12. Definiera begreppet fundamental lösningsmängd. Bestäm en fundamental lösningsmängd till differentialekvationen $y'' + 3y' + 2y = 0$. Bestäm även allmänna lösningen till differentialekvationen $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}$.

13. Laplacetransformen ges av $L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ under lämpliga villkor.
Vilka av följande påståenden är korrekta? Bevis eller motexempel krävs.

a) $L\{t^2\} = \{L\{t\}\}^2$ b) $L\{2t\} = 2L\{t\}$

c) $L\{t + t^2\} = L\{t\}L\{t^2\}$ d) $L\{t + t^2\} = L\{t\} + L\{t^2\}$

e) f är styckvis kontinuerlig för $t \geq 0$ och av exponentiell ordning. $\lim_{s \to \infty} F(s) = 0$ där $F(s) = L\{f(t)\}$.

14. P är en två gånger deriverbar funktion som uppfyller $P(0) = P'(0) = 0$. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + P'(x)y' + P''(x)y = P''(x)$ som uppfyller villkoren $y(0) = 2$ och $y'(0) = 0$.

15.a) Visa att $\{\sin nx\}$, $n = 1, 2, 3,$ utgör en mängd av ortogonala funktioner på intervallet $[0,\pi]$.

15.b) Skriv funktionen $f(x) = \sin^3 x$ på intervallet $[0,\pi]$ som en linjärkombination av lämpliga ortogonala funktioner ovan.

15.c) Antag att funktionen $f(x) = x^2 + 1$, $0 < x < 3$ är utvecklad i följande tre serier: en Fourierserie, en cosinusserie och en sinusserie. Ange det värde mot vilket respektive serie konvergerar mot för $x = 0$.