Lösningsförslag till tentamensskrivning i Differentialekvationer I, SF1633(5B1206).

Torsdagen den 22 oktober 2009, kl 0800-1300.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Del 1
Modul 1.
En termometer tas från ett rum och ut. Utetemperaturen är 5°C.
Termometern visar efter 1 minut 15°C och efter 2 minuter 10°C. Vad är temperaturen i rummet ?
Antag att Newtons avsvalningslag gäller, dvs avsvalningshastigheten är proportionell mot temperaturdifferensen.
Lösning:
Låt $T(t)$ vara termometerns temperatur vid tiden t .

Newtons avsvalningslag ger oss följande differentialekvation: $\frac{dT}{dt} = \quad k(T(t) \quad T_0)$.

Proportionalitetskonstanten k är positiv och T_0 är utetemperaturen vilken är $5 \ C$.
Differentialekvationen är linjär av första ordningen. Dess lösning kan fås som summan av den allmänna homogena lösningen och en partikulärlösning. Vi får $T(t) = Ce^{\ kt} + 5$.
Vi bestämmer konstanterna med hjälp av de givna villkoren.

Det leder till
$$\begin{matrix} 15 = T(1) = Ce^{\ k} + 5 & 10 = Ce^{\ k} & e^k = 2, \quad k = \ln 2 \\ 10 = T(2) = Ce^{\ 2k} + 5 & 5 = Ce^{\ 2k} & C = 10e^k = 20 \end{matrix}.$$

Insättning i den allmänna lösningen ger $T(t) = 20e^{\ t\ln 2} + 5 = 20 \ \ 2^{\ t} + 5$.
Rumstemperaturen erhålles för $t = 0$, vilket blir 25°C. Ett rimligt resultat.
SVAR: Rumstemperaturen är 25°C.

Modul 2.

En partikel befinner sig i ett hastighetsfält $\mathbf{V}(x, y) = \begin{matrix} 2x & y \\ 3x & 2y \end{matrix}$ så att partikelns hastighetsvektor

$\mathbf{X}\ (t) = \begin{matrix} x\ (t) \\ y\ (t) \end{matrix}$ ges av $\mathbf{X}\ (t) = \mathbf{V}(x(t), y(t))$.

Bestäm $\mathbf{X}(t)$ för en godtycklig tidpunkt om $\mathbf{X}(0) = \begin{matrix} 2 \\ 6 \end{matrix}$.

Vart tar partikeln vägen efter lång tid ?
Lösning:

Vi skriver systemet på matrisform. $\mathbf{X}\ (t) = \begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{matrix} \ \mathbf{X}(t)$.

Vi bestämmer matrisens egenvärden och tillhörande egenvektorer.

Egenvärdena erhålles ur ekvationen $0 = \det(\mathbf{A} \quad \mathbf{I})$ där $\mathbf{A} = \begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{matrix}$.

Detta ger oss följande ekvation $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \ ^2 \quad 4 + 3 = \ ^2 \quad 1 = 0$.

Egenvärdena är $\quad = \pm 1$.
Egenvektorerna erhålles ur det homogena systemet $(\mathbf{A} \quad \mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}$ med aktuellt egenvärde insatt.

$\underline{\quad = 1}$ ger $\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & & 2 \quad 1 \end{matrix} \ \mathbf{K} = \mathbf{0}, \ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{matrix} \ \mathbf{K} = \mathbf{0}$. En egenvektor är $\mathbf{K}_1 = \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}$.

$= \ 1$ ger $\begin{pmatrix}2+1 & 1\\ 3 & 2+1\end{pmatrix}\mathbf{K}=\mathbf{0}, \begin{pmatrix}3 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\mathbf{K}=\mathbf{0}$. En egenvektor är $\mathbf{K}_2=\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$.

Den allmänna lösningen ges av $\mathbf{X}(t)=c_1e^{t}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}+c_2e^{\ t}\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{t} & e^{\ t}\\ e^{t} & 3e^{\ t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{t} & e^{\ t}\\ e^{t} & 3e^{\ t}\end{pmatrix}\mathbf{C}$.

Bestäm den lösning som uppfyller villkoret $\mathbf{X}(0)=\begin{pmatrix}2\\ 6\end{pmatrix}$.

Insättning i den allmänna lösningen ger $\begin{pmatrix}2\\ 6\end{pmatrix}=\mathbf{X}(0)=c_1\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$, vilket ger $\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix}$.

Den sökta lösningen är $\mathbf{X}(t)=2e^{\ t}\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$. Efter lång tid hamnar partikeln i origo.

SVAR: Den sökta lösningen är $\mathbf{X}(t)=2e^{\ t}\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$. Efter lång tid hamnar partikeln i origo.

<u>Modul 3.</u>

Bestäm $u(x,t)$ då
$$\begin{aligned} &u_{tt}=4u_{xx}\\ &u(0,t)=u(\ ,t)=0\\ &u(x,0)=\sin 2x+4\sin 4x\\ &\frac{u}{t}(x,t)\Big|_{t=0}=0 \end{aligned}$$

<u>Lösning:</u>
Problemet löses med hjälp av variabelseparationsmetoden.
Sätt: $u(x,t)=X(x)T(t)$.
Insättning i differentialekvationen ger: $X(x)T\ \ (t)=4X\ \ (x)T(t)$.
Dividera med $4X(x)T(t)$.
$$\frac{T\ \ (t)}{4T(t)}=\frac{X\ \ (x)}{X(x)}=\text{konstant}=$$
Randvillkoren ger att separationskonstanten är negativ. Sätt: $=\ \ ^2$, där $\ \ R$.
Vi erhåller följande system av ordinära differentialekvationer.
$$X\ \ (x)+\ ^2X(x)=0$$
$$T\ \ (t)+4\ \ ^2T(t)=0$$
Dessa har lösningarna:
$$\begin{aligned} X(x)&=A\cos\ \ x+B\sin\ \ x\\ T(t)&=C\cos 2\ \ t+D\sin 2\ \ t \end{aligned}$$
Randvillkoren tillsammans med variabelseparationen ger oss följande villkor: $X(0)=X(\ \ )=0$.

Insättning ovan ger:
$$\begin{aligned} 0&=X(0)=A\\ 0&=X(\ \ )=A\cos\ \ \ +B\sin \end{aligned}$$
vilket ger:
$$\begin{aligned} A&=0\\ &=n\ ,\ \ n\ \ \ N \end{aligned}$$
Lösningar är på formen: $B\sin nx\{C\cos 2nt+D\sin 2nt\}$.

Även linjärkombinationer är lösningar: $u(x,t)=\ \ \sum_{n=1}\{a_n\cos 2nt+b_n\sin 2nt\}\sin nx$.

Nu över till begynnelsevillkoren. Här behövs $\dfrac{u}{t}$.

$$\frac{u}{t}(x,t)=\sum_{n=1} 2n\{\ \ a_n\sin 2nt+b_n\cos 2nt\}\sin nx$$

$$\sin 2x + 4\sin 4x = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \quad \Rightarrow \quad a_2 = 1 \ , \ a_4 = 4 \ , \ \text{övriga } a_n = 0$$

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} 2nb_n \sin nx \quad \Rightarrow \quad b_n = 0 \ , \ \forall n \in N .$$

Lösningen till den partiella differentialekvationen ges av: $u(x,t) = \cos 4t \ \sin 2x + 4\cos 8t \ \sin 4x$

SVAR: $u(x,t) = \cos 4t \ \sin 2x + 4\cos 8t \ \sin 4x$

Del2

11. Differentialekvationen $t^2 y'' - 2y = 0, \ t > 0$ har lösningar på formen $y(t) = t^{\lambda}, \ \lambda \in R$..

Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $t^2 y'' - 2y = 3t^2 - 1, \ t > 0$

Lösning:

Insättning av $y(t) = t^{\lambda}, \ \lambda \in R$ i $t^2 y'' - 2y = 0, \ t > 0$ ger $t^2 \lambda(\lambda - 1)t^{\lambda - 2} - 2t^{\lambda} = 0$.

Omforma ekvationen: $(\lambda^2 - \lambda - 2)t^{\lambda} = 0$, vilken leder till att $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, ty $t > 0$.

Ekvationen har rötterna $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = 2$.

Då är två linjärt oberoende lösningar $y_1 = t^{-1}$ och $y_2 = t^2$.

Den allmänna homogena lösningen, y_h, är en linjärkombination av $y_1 = t^{-1}$ och $y_2 = t^2$.

Vi får $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 t^{-1} + c_2 t^2$, där c_1 och c_2 är godtyckliga reella konstanter.

Den allmänna lösningen till den inhomogena differentialekvationen är summan av allmänna homogena lösningen och en partikulärlösning.

En partikulärlösning kan fås genom reduktion av ordning eller med variation av parametrar.

Vi väljer reduktion av ordning.

Insättning av $y_p = t^2 z$ i den inhomogena differentialekvationen ger

$$t^2\left\{t^2 z'' + 4tz' + 2z\right\} - 2t^2 z = 3t^2 - 1, \quad t^4 z'' + 4t^3 z' = 3t^2 - 1, \quad (t^4 z')' = 3t^2 - 1.$$

Integrera med avseende på t: $t^4 z' = t^3 - t$, $z' = t^{-1} - t^{-3}$.

Integrera med avseende på t: $z = \ln t + \frac{1}{2} t^{-2}$

Partikulärlösningen är $y_p = t^2 z = t^2 \ln t + \frac{1}{2}$.

Den allmänna lösningen till den inhomogena differentialekvationen är $y = y_h + y_p = c_1 t^{-1} + c_2 t^2 + t^2 \ln t + \frac{1}{2}$.

SVAR: Den sökta lösningen är $y = c_1 t^{-1} + c_2 t^2 + t^2 \ln t + \frac{1}{2}$.

12. Bestäm $y(t)$, då $y(0) = 0, \ y'(0) = 2$ samt $y''(t) + y(t) = 2\delta(t - 3) + 4\int_0^t y'(u)\cos(t - u)\,du, \ t \geq 0$

Lösning:

Vi laplacetransformerar ekvationen.

Då erhålles $s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = 2e^{-3s} + 4\left\{sY(s) - y(0)\right\}\frac{s}{s^2 + 1}$.

Insättning av villkoren samt hyfsning ger: $(s^2 + 1 - 4s\frac{s}{s^2 + 1})Y(s) = 2 + 2e^{-3s}$.

Detta ger oss: $\frac{(s^2 - 1)^2}{s^2 + 1} Y(s) = 2 + 2e^{-3s}$ eller $Y(s) = \frac{2(s^2 + 1)}{(s^2 - 1)^2} + e^{-3s}\frac{2(s^2 + 1)}{(s^2 - 1)^2}$.

Partialbråksuppdela

$$\frac{2(s^2+1)}{(s^2-1)^2}=\frac{2(s^2+1)}{(s+1)^2(s-1)^2}=\frac{A}{(s+1)^2}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{(s-1)^2}+\frac{D}{s-1}$$

Handpåläggning ger $A=C=1$ och då inses att $B=D=0$.

$$Y(s)=\left(\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{(s-1)^2}\right)+e^{-3s}\left(\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{(s-1)^2}\right)$$

Vi återtransformerar först $F(s)=\dfrac{1}{(s+1)^2}+\dfrac{1}{(s-1)^2}$ vilket ger $f(t)=te^{-t}+te^{t}$.

Då kan hela uttrycket återtransformeras.

$$y(t)=te^{-t}+te^{t}+U(t-3)f(t-3)=te^{-t}+te^{t}+U(t-3)(t-3)(e^{-(t-3)}+e^{(t-3)})$$

SVAR: $y(t)=te^{-t}+te^{t}+U(t-3)(t-3)(e^{-(t-3)}+e^{(t-3)})$

13. Differentialekvationen $x''=x-x^2-x'$, kan omformas till ett system. Bestäm de kritiska punkterna för systemet. Klassificera de kritiska punkterna med avseende på typ och stabilitet.

<u>Lösning:</u>

Vi sätter $y=x'$, $y'=x''$ och erhåller det icke-linjära systemet $\mathbf{X}'=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\x-x^2-y\end{pmatrix}$.

Vi bestämmer först de kritiska punkterna, där hastighetsvektorn $\mathbf{X}'=\mathbf{0}$.

Vi får de kritiska punkterna $(0,0)$ och $(1,0)$.

Det icke-linjära systemet linjariseras med hjälp av Jacobianen.

Jacobianen $\mathbf{J}(x,y)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1-2x & -1\end{pmatrix}$.

Insättning av de stationära punkterna ger oss konstanta matriser, vars egenvärden bestämmes.

<u>$(0,0)$</u>

$\mathbf{J}(0,0)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\mathbf{A}$. Egenvärdena fås ur ekvationen $0=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})$.

Detta ger oss följande ekvation $\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+\lambda-1=(\lambda+\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}=0$.

Egenvärdena är $\lambda=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, vilket är reella egenvärden med olika tecken.

$(0,0)$ är en sadelpunkt, vilken är instabil.

<u>$(1,0)$</u>

$\mathbf{J}(1,0)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\mathbf{B}$. Egenvärdena fås ur ekvationen $0=\det(\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I})$.

Detta ger oss följande ekvation $\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+\lambda+1=(\lambda+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}=0$.

Egenvärdena är $\lambda=-\dfrac{1}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, vilket är komplexa egenvärden med negativa realdel.

$(1,0)$ är en stabil spiralpunkt.

Detta gäller för såväl det linjära som det icke-linjära systemet.

SVAR: $(0,0)$ är en sadelpunkt, vilken är instabil. $(1,0)$ är en stabil spiralpunkt.

14. Betrakta en smal stav. Låt dess temperatur ges av $u(x,t)$.

Dess ena ände hålles vid den konstanta temperaturen $0\ ^0\mathrm{C}$ och dess andra ände är isolerad.

Vid tiden $t = 0$ är stavens temperatur $u(x,0) = 2\sin 3x + 5\sin 7x$.

$$u_t = u_{xx} \ , \ \ 0 < x < \frac{}{2} \ , \ \ t > 0$$

Detta ger upphov till följande problem: $u(0,t) = 0, \ \ u_x(\frac{}{2},t) = 0, \ \ t > 0$.

$$u(x,0) = 2\sin 3x + 5\sin 7x \ , \ \ 0 < x < \frac{}{2}$$

Bestäm stavens temperatur som funktion av läget och tiden.

Lösning:

Vi bestämmer lösningar på formen $u(x,t) = X(x)T(t)$.

Insättning i differentialekvationen ger $X(x)T \ (t) = X \ \ (x)T(t)$.

Dividera med $X(x)T(t)$: $\dfrac{T \ (t)}{T(t)} = \dfrac{X \ \ (x)}{X(x)} = \text{konstant} = \quad$.

Vi får ett system av ordinära differentialekvationer: $\begin{matrix} X \ \ (x) \quad X(x) = 0 \\ T \ (t) \quad T(t) = 0 \end{matrix}$.

Dessa ekvationer är linjära med konstanta koefficienter och löses med karakteristisk ekvation.

Vi betraktar den första ekvationen och får tre skilda fall att undersöka.

Dessa är följande: $\ > 0$, $\ = 0$ och $\ < 0$.

$= \ ^2, \quad R$	$= 0$	$= \ ^2, \quad R$
$X \ \ (x) \quad ^2X(x) = 0$	$X \ \ (x) = 0$	$X \ \ (x) + \ ^2X(x) = 0$
$X(x) = A_1e^{\ x} + B_1e^{\ \ x}$	$X(x) = A_2x + B_2$	$X(x) = A_3\cos \ \ x + B_3\sin \ \ x$

Randvillkoren och variabelseparationen ger oss följande villkor: $X(0)T(t) = 0, \ \ X \ (\frac{}{2})T(t) = 0, \ \ t > 0$.

Dessa skall gälla för alla $t > 0$.

Detta ger: $X(0) = 0, \ \ X \ (\frac{}{2}) = 0$.

Nu över till de tre fallen. Vi behöver även derivatan $X \ (x)$.

$= \ ^2, \quad R$	$= 0$	$= \ ^2, \quad R$
$X(x) = A_1e^{\ x} + B_1e^{\ \ x}$	$X(x) = A_2x + B_2$	$X(x) = A_3\cos \ \ x + B_3\sin \ \ x$
$X \ (x) = \ \ (A_1e^{\ x} \quad B_1e^{\ \ x})$	$X \ (x) = A_2$	$X \ (x) = \ \ (\ \ A_3\sin \ \ x + B_3\cos \ \ x)$

Insättning av villkoren ger.

$= \ ^2, \quad R$	$= 0$	$= \ ^2, \quad R$
$X(0) = A_1 + B_1 = 0$	$X(0) = B_2 = 0$	$X(0) = A_3 = 0$
$X \ (\frac{}{2}) = \ \ (A_1e^{\ \frac{}{2}} \quad B_1e^{\ \ \frac{}{2}}) = 0$	$X \ (\frac{}{2}) = A_2 = 0$	$X \ (\frac{}{2}) = \ \ (\ \ A_3\sin \ \ \frac{}{2} + B_3\cos \ \ \frac{}{2}) = 0$
$B_1 = \ \ A_1$	$B_2 = 0$	$A_3 = 0$
$A_1(e^{\ \frac{}{2}} + e^{\ \ \frac{}{2}}) = 0$	$A_2 = 0$	$B_3\cos \ \ \frac{}{2} = 0$

Den enda icke-triviala lösningen erhålles i fallet $\ = \ \ ^2, \quad R$.

Då erhålles $\ = 2n + 1$, $n \quad N$ och lösningen har formen $X(x) = B_3\sin(2n+1)x$.

Motsvarande t-ekvation har lösningen $T(t) = C_3e^{\ \ t} = C_3e^{\ (2n+1)^2 t}$.

Vi får våra lösningar till den partiella differentialekvationen och som uppfyller de givna randvillkoren på formen

$u_n(x,t) = X(x)T(t) = B_3C_3\sin(2n+1)x \ e^{\ (2n+1)^2 t}$.

Även linjärkombinationer av sådana lösningar är lösningar.

Vi erhåller $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{-(2n+1)^2 t}\sin(2n+1)x$.

Det återstår att bestämma koefficienterna.
Dessa erhålles med hjälp av det givna begynnelsevillkoret $u(x,0)=2\sin 3x+5\sin 7x$.

Insättning ger: $u(x,0)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin(2n+1)x \;=2\sin 3x+5\sin 7x$.

Identifiering ger att alla utom två koefficienter är lika med noll.
Vi får $b_1=2$ och $b_3=5$. Den sökta lösningen är $u(x,t)=2e^{-9t}\sin 3x+5e^{-49t}\sin 7x$.

SVAR: Den sökta lösningen är $u(x,t)=2e^{-9t}\sin 3x+5e^{-49t}\sin 7x$.

15. Vid en kemisk reaktion bildas ett ämne C av A och B. Ursprungligen finns 50 gram av A och 32 gram av B. Reaktionen är sådan att för varje gram av A som används åtgår 4 gram av B. 30 gram av C har bildats på 10 minuter. Bestäm mängden C, $x(t)$, då reaktionshastigheten är proportionell mot produkten av de återstående mängderna av A och B med hjälp av en differentialekvation för reaktionen. Bestäm även $\lim_{t\to\infty} x(t)$ och det som då återstår av A och B.

Lösning:

För att erhålla x gram av C åtgår $\frac{x}{5}$ av A och $\frac{4x}{5}$ av B.

Det återstår då $50-\frac{x}{5}$ gram av A och $32-\frac{4x}{5}$ gram av B.

Differentialekvationen blir $\frac{dx}{dt}=k_1(50-\frac{x}{5})(32-\frac{4x}{5})=\frac{4}{25}k_1(250-x)(40-x)$, där k_1 är en proportionalitetskonstant. Vi inför en ny konstant. $\frac{dx}{dt}=k(250-x)(40-x)$.

Vi har en separabel differentialekvation. Stationära lösningar är $x=250$ och $x=40$.

Omforma differentialekvationen $\frac{1}{(250-x)(40-x)}\frac{dx}{dt}=k$.

Partialbråksuppdela $\left(\frac{-\frac{1}{210}}{250-x}+\frac{\frac{1}{210}}{40-x}\right)\frac{dx}{dt}=k$, $\left(\frac{-1}{250-x}+\frac{1}{40-x}\right)\frac{dx}{dt}=210k$.

Integrera med avseende på t : $\ln|250-x|-\ln|40-x|=210kt+\ln|C_1|$.

$\ln\left|\frac{250-x}{40-x}\right|=210kt+\ln|C_1|$, $\frac{250-x}{40-x}=Ce^{210kt}$, $x=\frac{250-40Ce^{210kt}}{1-Ce^{210kt}}$.

Bestäm konstanterna. $x(0)=0$ ger $C=\frac{25}{4}$.

$x(10)=30$ ger $\frac{220}{10}=\frac{25}{4}e^{2100k}$, $e^{2100k}=\frac{88}{25}$, $210k=\frac{1}{10}\ln\frac{88}{25}$.

Mängden C är $x(t)=\frac{250-40\cdot\frac{25}{4}e^{210kt}}{1-\frac{25}{4}e^{210kt}}=1000\frac{1-e^{210kt}}{4-25e^{210kt}}=1000\frac{1-e^{-210kt}}{25-4e^{-210kt}}$.

$$x(t) = 1000\frac{1 \quad \frac{88}{25}^{\;\frac{t}{10}}}{25 \quad 4 \; \frac{88}{25}^{\;\frac{t}{10}}}$$

Efter lång tid kommer mängden av C att vara $\lim_{t} x(t) = \lim_{t} 1000\frac{1 \quad e^{210kt}}{25 \quad 4e^{210kt}} = 40$ gram.

Detta kan även inses genom kvalitativ analys av differentialekvationen.

Det återstår $50 \quad \frac{40}{5} = 42$ gram av A och $32 \quad \frac{4 \;\; 40}{5} = 0$ gram av B.

SVAR: Mängden C är $x(t) = 1000\frac{1 \quad e^{210kt}}{25 \quad 4e^{210kt}}$, där $210k = \frac{1}{10}\ln\frac{88}{25}$.

$\lim_{t} x(t) = 40$ gram. Det återstår 42 gram av A och 0 gram av B.