Tentamensskrivning i Differentialekvationer I, SF1633(5B1206).

Torsdagen den 22 oktober 2009, kl 0800-1300.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Del 1 är avsedd för betyg E och omfattar 3 uppgifter.
För betyg E krävs 3 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, A, B, C och D, och omfattar totalt 20 poäng.
Uppgifterna 11-15 ger 4 poäng vardera.
För betyg A krävs förutom 3 godkända moduler även 15 poäng på del 2.
För betyg B krävs förutom 3 godkända moduler även 11 poäng på del 2.
För betyg C krävs förutom 3 godkända moduler även 7 poäng på del 2.
För betyg D krävs förutom 3 godkända moduler även 3 poäng på del 2.

De som har registrering på 5B1206 erhåller betyg enligt nedan.
Tentamen är tvådelad.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 3 uppgifter.
För betyg 3 krävs 3 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, 4 och 5, och omfattar totalt 20 poäng.
Uppgifterna 11-15 ger 4 poäng vardera.
För betyg 4 krävs förutom 3 godkända moduler även 8 poäng på del 2.
För betyg 5 krävs förutom 3 godkända moduler även 14 poäng på del 2.

<u>Del 1</u>

<u>Modul 1.</u>

En termometer tas från ett rum och ut. Utetemperaturen är 5°C.
Termometern visar efter 1 minut 15°C och efter 2 minuter 10°C. Vad är temperaturen i rummet ?
Antag att Newtons avsvalningslag gäller, dvs avsvalningshastigheten är proportionell mot temperaturdifferensen.

<u>Modul 2.</u>

En partikel befinner sig i ett hastighetsfält $\mathbf{V}(x,y) = \begin{matrix} 2x & y \\ 3x & 2y \end{matrix}$ så att partikelns hastighetsvektor $\mathbf{X}\ (t) = \begin{matrix} x\ (t) \\ y\ (t) \end{matrix}$

ges av $\mathbf{X}\ (t) = \mathbf{V}(x(t), y(t))$. Bestäm $\mathbf{X}(t)$ för en godtycklig tidpunkt om $\mathbf{X}(0) = \begin{matrix} 2 \\ 6 \end{matrix}$.

Vart tar partikeln vägen efter lång tid ?

<u>Modul 3.</u>

Bestäm $u(x,t)$ då
$$\begin{aligned} &u_{tt} = 4u_{xx} \\ &u(0,t) = u(\ \ ,t) = 0 \\ &u(x,0) = \sin 2x + 4\sin 4x \\ &\frac{u}{t}(x,t)\Big|_{t=0} = 0 \end{aligned}$$

vgv

Del2

11. Differentialekvationen $t^2y \quad 2y = 0$,□$t > 0$ har lösningar på formen $y(t) = t$,□ R ..

Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $t^2y \quad 2y = 3t^2 \quad 1$,□$t > 0$

12. Bestäm $y(t)$, då $y(0) = 0$,□$(0) = 2$ samt $y\ (t) + y(t) = 2\ \ (t \quad 3) + 4\int_0^t y\ (u)\cos(t \quad u)du$,□ 0

13. Differentialekvationen $x \ = x \quad x^2 \quad x$, kan omformas till ett system. Bestäm de kritiska punkterna för systemet. Klassificera de kritiska punkterna med avseende på typ och stabilitet.

14. Betrakta en smal stav. Låt dess temperatur ges av $u(x,t)$.
Dess ena ände hålles vid den konstanta temperaturen $0\ ^0\mathrm{C}$ och dess andra ände är isolerad.
Vid tiden $t = 0$ är stavens temperatur $u(x,0) = 2\sin 3x + 5\sin 7x$.

$$u_t = u_{xx}\ ,\ \ 0 < x < \frac{\quad}{2}\ ,\ \ t > 0$$

Detta ger upphov till följande problem: $u(0,t) = 0,\ \ u_x(\frac{\quad}{2},t) = 0,\ \ t > 0$.

$$u(x,0) = 2\sin 3x + 5\sin 7x\ ,\ \ 0 < x < \frac{\quad}{2}$$

Bestäm stavens temperatur som funktion av läget och tiden.

15. Vid en kemisk reaktion bildas ett ämne C av A och B. Ursprungligen finns 50 gram av A och 32 gram av B. Reaktionen är sådan att för varje gram av A som används åtgår 4 gram av B. 30 gram av C har bildats på 10 minuter. Bestäm mängden C, $x(t)$, då reaktionshastigheten är proportionell mot produkten av de återstående mängderna av A och B med hjälp av en differentialekvation för reaktionen.
Bestäm även $\lim_{t} x(t)$ och det som då återstår av A och B.