Kompletteringstentamen i Differentialekvationer I, SF1633(5B1206).

Måndagen den 16 november 2009, kl 0900-1000.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Modul 1.

I en befolkningsmodell för ett samhälle antas att hastigheten varmed befolkningsmängden, $P(t)$, förändras vara beroende av differensen mellan födelse- och dödshastigheten.
Födelsehastigheten är proportionell mot befolkningsmängden medan dödshastigheten är proportionell mot kvadraten på befolkningsmängden. Ställ upp ovanstående modell i form av en differentialekvation. Analysera därefter modellen kvalitativt med proportionalitetskonstanterna lika med tre och ett i nämnd ordning.

Lösning:

Den sökta modellen blir: $\dfrac{dP}{dt} = k_1P \quad k_2P^2$, där $P \quad 0$.

Inför de givna värdena på konstanterna $k_1 = 3$ och $k_2 = 1$: $\dfrac{dP}{dt} = 3P \quad P^2 = P(3 \quad P)$.

Vi bestämmer först de stationära lösningarna och analyserar därefter lösningarnas uppförande för olika startvärden.
Vi är intresserade av långtidsbeteendet.
De stationära lösningarna ges av: $P_1 = 0$ och $P_2 = 3$.

Vi erhåller:

$$P > 3 \quad \frac{dP}{dt} < 0 \quad P(t) \text{ är avtagande .}$$

$$0 < \mathrm{P} < 3 \quad \frac{dP}{dt} > 0 \quad P(t) \text{ är växande .}$$

Detta innebär att vi erhåller ett stabilt jämviktsläge $P = 3$.
Efter lång tid kommer befolkningsmängden att vara lika med 3.

SVAR: Den sökta modellen ges av: $\dfrac{dP}{dt} = k_1P \quad k_2P^2$, där $P \quad 0$ och $\lim_{t} P(t) = 3$.

.

Modul 2.

. Betrakta ett linjärt system $\mathbf{X} \;\; = \mathbf{AX}$ av två differentialekvationer. Matrisen $\mathbf{A}$ har reella element.

Vidare är det känt att ett egenvärde är $1 + 2i$ och en tillhörande egenvektor är $\begin{matrix} 1 \\ i \end{matrix}$.

Bestäm en fundamentalmatris till systemet. Ange även den allmänna lösningen till systemet.
Avgör vad som händer efter lång tid med en partikel som placeras i punkten $(3, 5)$.

Lösning:

Med hjälp av det givna egenvärdet och tillhörande egenvektor erhålles en komplex lösning $\mathbf{Z} = e^{(1+2i)t} \begin{matrix} 1 \\ i \end{matrix}$.

Realdel respektive imaginärdel av den komplexa lösningen ger två linjärt oberoende lösningar.
Dessa bildar varsin kolonn i en fundamentalmatris.

$$\mathbf{X}_1 = \mathrm{Re}\,\mathbf{Z} = \mathrm{Re}\left(e^t(\cos 2t + i\sin 2t) \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} + i \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right) = e^t \begin{matrix} \cos 2t \\ -\sin 2t \end{matrix}$$

$$\mathbf{X}_2 = \mathrm{Im}\,\mathbf{Z} = \mathrm{Im}\left(e^t(\cos 2t + i\sin 2t) \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} + i \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right) = e^t \begin{matrix} \sin 2t \\ \cos 2t \end{matrix}$$

En fundamentalmatris är $\quad = \begin{matrix} e^t\cos 2t & e^t\sin 2t \\ e^t\sin 2t & e^t\cos 2t \end{matrix}$.

Den allmänna lösningen till systemet ges av: $\mathbf{X} = \quad \mathbf{C}$, där $\mathbf{C}$ är en konstant vektor.

$$\mathbf{X} = \begin{matrix} e^t\cos 2t & e^t\sin 2t \\ e^t\sin 2t & e^t\cos 2t \end{matrix} \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \end{matrix} = C_1 \begin{matrix} e^t\cos 2t \\ e^t\sin 2t \end{matrix} + C_2 \begin{matrix} e^t\sin 2t \\ e^t\cos 2t \end{matrix}$$

En partikel som placeras i punkten $(3, 5)$ kommer efter lång tid att avlägsnas obegränsat från den kritiska punkten origo, ty realdelen av egenvärdena är större än noll.

SVAR: En fundamentalmatris är $= \begin{matrix} e^t\cos 2t & e^t \sin 2t \\ e^t \sin 2t & e^t \cos 2t \end{matrix}$.

Den allmänna lösningen till systemet ges av: $\mathbf{X} = \begin{matrix} e^t\cos 2t & e^t \sin 2t \\ e^t \sin 2t & e^t \cos 2t \end{matrix} \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \end{matrix} = C_1 \begin{matrix} e^t\cos 2t \\ e^t \sin 2t \end{matrix} + C_2 \begin{matrix} e^t\sin 2t \\ e^t \cos 2t \end{matrix}$.

En partikel som placeras i punkten $(3, 5)$ kommer efter lång tid att avlägsnas obegränsat från den kritiska punkten,origo.

<u>Modul 3.</u>

Bestäm Fourierserien till den 2-periodiska funktionen $f(x) = |x| + x$, $1 < x < 1$.

Bestäm vidare Fourierseriens värde för $x = 1$.

<u>Lösning:</u>

Den givna funktionen är varken jämn eller udda.

Funktionen f tilldelas Fourierserien $\frac{a_0}{2} + \underset{n=1}{} a_n \cos\frac{n\ x}{1} + b_n \sin\frac{n\ x}{1}$.

Den givna funktionen $f(x) = |x| + x$ delas upp i två delar, $f_1(x) = |x|$ och $f_2(x) = x$.

Enligt BETA har $f_1(x) = |x|$ fourierserien $\frac{1}{2} \quad \underset{n=1}{} 2\frac{1 \quad \cos n}{(n\ )^2}\cos n\ x$.

Enligt BETA har $f_2(x) = x$ fourierserien $\underset{n=1}{} 2\frac{\cos n}{n}\sin n\ x$.

Addition ger att $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ har fourierserien

$$\frac{1}{2} \quad \underset{n=1}{} 2\frac{1 \quad \cos n}{(n\ )^2}\cos n\ x \; + \underset{n=1}{} 2\frac{\cos n}{n}\sin n\ x$$

Det återstår att bestämma fourierseriens värde för $x = 1$. Här är den givna funktionen ej kontinuerlig, men funktionen och dess derivata är styckvis kontinuerlig på hela reella axeln. Fourierseriens värde för $x = 1$ blir medelvärdet

$$\frac{f(1+) + f(1\ \ )}{2} = \frac{0 + 2 \quad 1}{2} = 1 .$$

SVAR: f tilldelas fourierserien $\frac{1}{2} \quad \underset{n=1}{} 2\frac{1 \quad \cos n}{(n\ )^2}\cos n\ x \; + \underset{n=1}{} 2\frac{\cos n}{n}\sin n\ x$.

Fourierseriens värde för $x = 1$.är lika med ett.

Anmärkning: En direkt beräkning kan även genomföras.

Vi omformar den givna funktionen: $f(x) = |x| + x = \begin{matrix} 2x\,, 0 \quad x < 1 \\ 0\,, \quad 1 < x < 0 \end{matrix}$.

$$a_n = \frac{1}{1}\int_{1}^{1} f(x)\cos n\ x dx = \int_{0}^{1} 2x \cos n\ x dx = \{\text{partiell integration}\ \} =$$

$$= \left[2x\frac{\sin n\ x}{n}\right]_0^1 \quad \int_0^1 2\frac{\sin n\ x}{n}dx = 2\left[\frac{\cos n\ x}{(n\ )^2}\right]_0^1 = 2\frac{\cos n \quad 1}{(n\ )^2}$$

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_{1}^{1} f(x)dx = \int_0^1 2x dx = 1$$

$$b_n = \frac{1}{1} {}_{1}^{1} f(x)\sin n \;\; xdx = {}_{0}^{1} 2x\sin n \;\; xdx = \{\text{partiell integration } \} =$$

$$= \left[2x \frac{\cos n \;\; x}{n}\right]_0^1 \;\; {}_{0}^{1} 2\frac{\cos n \;\; x}{n} dx = 2\frac{\cos n}{n} \quad 2\left[\frac{\sin n \;\; x}{(n \;\;)^2}\right]_0^1 = 2\frac{\cos n}{n}.$$

Vi har erhållit följande fourierserie: $\frac{1}{2} + \;\; {}_{n=1} \;\; 2\frac{\cos n \quad 1}{(n \;\;)^2}\cos n \;\; x + 2\frac{\cos n}{n}\sin n \;\; x$.