Tentamensskrivning i Differentialekvationer I, SF1633(5B1206).

Tisdagen den 12 januari 2010, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Del 1 är avsedd för betyg E och omfattar 3 uppgifter.
För betyg E krävs 3 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, A, B, C och D, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg A krävs förutom 3 godkända moduler även 15 poäng på del 2.
För betyg B krävs förutom 3 godkända moduler även 11 poäng på del 2.
För betyg C krävs förutom 3 godkända moduler även 7 poäng på del 2.
För betyg D krävs förutom 3 godkända moduler även 3 poäng på del 2.

De som har registrering på 5B1206 erhåller betyg enligt nedan.
Tentamen är tvådelad.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 3 uppgifter.
För betyg 3 krävs 3 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, 4 och 5, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg 4 krävs förutom 3 godkända moduler även 8 poäng på del 2.
För betyg 5 krävs förutom 3 godkända moduler även 14 poäng på del 2.
Uppgifterna 11-15 ger 4 poäng vardera.

Del 1

Modul 1.

I en populationsmodell är den relativa tillväxthastigheten , som funktion av antalet djur, $P(t)$, ett förstagradspolynom , nämligen en konstant, a, minus antalet djur gånger en annan konstant, b. Konstanterna är positiva. Då erhålles $\frac{1}{P(t)}\frac{dP(T)}{dt} = a - bP(t)$.

Denna modell justeras genom att ett konstant antal djur per tidsenhet, h, avlägsnas.

Den justerade matematiska modellen blir $\frac{dP(T)}{dt} = (a - bP(t))P(t) - h$.

Låt konstanterna därefter vara 5, 1 respektive 4.

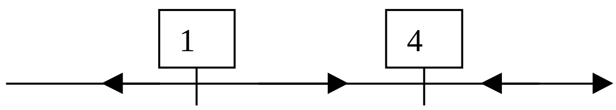
Studera långtidsbeteendet av $P(t)$ för olika startvärden på populationen.

Lösning:

Sätt in de givna konstanterna i differentialekvationen.

Då erhålles $\frac{dP}{dt} = (5 - P)P - 4 = -P^2 + 5P - 4 = (P-1)(4-P)$.

Vi bestämmer först kritiska punkter och studerar därefter derivatans tecken.
I de kritiska punkterna är derivatan lika med noll.
Vi erhåller två kritiska punkter $P = 1,\ P = 4$.
Nu över till studie av derivatans tecken.



Vi får följande population efter lång tid med startpopulationen P_0 : $\begin{cases} P_0 > 1: & P(t) \to 4 \ , t \to \infty \\ P_0 = 1: & P(t) \to 1 \ , t \to \infty \\ P_0 < 1: & P(t) \to 0 \ , t \to \infty \end{cases}$.

SVAR: $\begin{cases} P_0 > 1: & P(t) \to 4 \ , t \to \infty \\ P_0 = 1: & P(t) \to 1 \ , t \to \infty \\ P_0 < 1: & P(t) \to 0 \ , t \to \infty \end{cases}$.

Modul 2.

Låt $y_1(x)=5x^2,\ y_2(x)=3x+4x^3,\ y_3(x)=x^2+7x^3,\ y_4(x)=2x+x^2$ och

$y_5(x)=2x+3x^2+5x^3$ vara lösningar till en homogen linjär tredje ordningens differentialekvation.

Bestäm den entydiga lösning som uppfyller villkoren $y(1)=2,\ y'(1)=3$ och $y''(1)=4$.

Lösning:

Det behövs tre linjärt oberoende lösningar för att bestämma den allmänna lösningen till en homogen linjär tredje ordningens differentialekvation. Bland de givna lösningarna väljer vi en lämplig linjärkombination.

Tag $y=ax+bx^2+cx^3$ till allmän lösning. Konstanterna bestämmes med hjälp av de givna villkoren.

Första- och andraderivatan behövs. $y'=a+2bx+3cx^2,\ \ y''=2b+6cx$.

Insättning ger $\begin{cases} 2=y(1)=a+b+c \\ 3=y'(1)=a+2b+3c \\ 4=y''(1)=2b+6c \end{cases}$.

Totalmatrisen skrives upp och elementära radoperationer ger oss lösningen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Vi har $a=2,\ b=-1,\ c=1$. Detta ger oss den sökta lösningen $y=2x-x^2+x^3$

SVAR: Differentialekvationens lösning är $y=2x-x^2+x^3$.

Modul 3.

Bestäm $y(5)$ då $y'(t)+\int_0^t e^{2u}y(t-u)du=\delta(t-3)$, $t\ge 0$ och $y(0)=1$.

Lösning:

Laplacetransformera :

$$sY(s)-y(0)+\frac{1}{s-2}Y(s)=e^{-3s}$$

Insättning av villkoret ger:

$$sY(s)+\frac{1}{s-2}Y(s)=1+e^{-3s}$$

Lös ut den obekanta funktionens Laplacetransform

$$Y(s)=\frac{s-2}{s^2-2s+1}+\frac{s-2}{s^2-2s+1}e^{-3s}=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{(s-1)^2}+\left\{\frac{1}{s-1}-\frac{1}{(s-1)^2}\right\}e^{-3s}$$

Återtransformering ger:

$$y(t)=e^t-te^t+U(t-3)\left\{e^{t-3}-(t-3)e^{t-3}\right\}$$

Det sökta funktionsvärdet blir

$$y(5)=e^5-5e^5+U(5-3)\left\{e^{5-3}-(5-3)e^{5-3}\right\}=-4e^5-e^2$$

SVAR: Det sökta funktionsvärdet blir $y(5)=-4e^5-e^2$.

Del 2

11. Bestäm värdet på x så att $y(x)=4$, då $(x-2)y'+y=2x$ och $y(0)=3$.

Lösning:

Vi bestämmer först den allmänna lösningen och därefter den lösning som uppfyller villkoret $y(0)=3$.
Här noteras även lösningens existensintervall.
Den givna differentialekvationen är linjär av första ordningen.
Ekvationen kan skrivas på normalformal och en integrerande faktor kan bestämmas.
Observera dock att vänstra ledet är en derivata.

Vi får $((x-2)y)'=2x$. Integration med avseende på x ger: $(x-2)y=x^2+C$

Integrationskonstanten bestämmes: $y(0)=3$ ger $(0-2)3=C$, $C=-6$.

Den lösning som uppfyller differentialekvationen och begynnelsevillkoret är $y = \dfrac{x^2 - 6}{x - 2}$.

Här är $x \neq 2$ och lösningens existensintervall är $\{x \ : \ x < 2\}$.

Vi bestämmer nu x så att $y(x) = 4$.

$4 = \dfrac{x^2 - 6}{x - 2}$, $x^2 - 6 - 4x + 8 = 0$, $x^2 - 4x + 2 = 0$

Kvadratkomplettera: $(x - 2)^2 = 2$, $x = 2 \pm \sqrt{2}$.

Här är endast ett x-värde aktuellt.

Det x-värde som ligger i lösningens existensintervall är $x = 2 - \sqrt{2}$.

SVAR: Det entydiga värdet på x ges av $x = 2 - \sqrt{2}$.

12.a. *Härled* en partikulärlösning till det linjära system $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}$, då en fundamentalmatris ges av Φ.

b. Bestäm allmänna lösningen till systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos t} \\ 0 \end{pmatrix}$, då $-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$.

Lösning:

a. Vi utgår från den allmänna homogena lösningen, vilken kan skrivas: $\mathbf{X} = \Phi\mathbf{C}$, $\mathbf{C}$ är en konstant vektor.

En partikulärlösning ansättes som: $\mathbf{X}_p = \Phi\mathbf{U}$, där $\mathbf{U}$ är en tidsberoende vektor.

Insättning i systemet av differentialekvationer ger: $\Phi'\mathbf{U} + \Phi\mathbf{U}' = \mathbf{A}\Phi\mathbf{U} + \mathbf{F}$.

Kolonnerna i fundamentalmatrisen Φ består av linjärt oberoende lösningar till det homogena systemet.
Detta innebär att varje kolonn uppfyller det homogena systemet och således uppfyller även fundamentalmatrisen detsamma, med andra ord gäller att $\Phi' = \mathbf{A}\Phi$.

Vi erhåller då: $\mathbf{A}\Phi\mathbf{U} + \Phi\mathbf{U}' = \mathbf{A}\Phi\mathbf{U} + \mathbf{F}$, $\Phi\mathbf{U}' = \mathbf{F}$. Lös ut $\mathbf{U}'$.

Multiplicera med fundamentalmatrisens invers. Den existerar ty $\det\Phi \neq 0$. Vi erhåller $\mathbf{U}' = \Phi^{-1}\mathbf{F}$.

Integration ger: $\mathbf{U} = \int \Phi^{-1}\mathbf{F}dt$. Vi har erhållit $\mathbf{X}_p = \Phi\int \Phi^{-1}\mathbf{F}dt$.

b. Vi bestämmer först två linjärt oberoende lösningar till det homogena systemet och använder därefter variation av parametrar, se a., för att bestämma en partikulärlösning till det inhomogena systemet.
Den allmänna lösningen är summan av allmänna homogena lösningen och en partikulärlösning.

För att erhålla lösningar till det homogena systemet bestämmer vi egenvärdena till matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 , \ \lambda = \pm i .$$

Vi har erhållit komplexa egenvärden och bestämmer då en komplex egenvektor.

Bestäm en egenvektor till egenvärdet $\lambda = i$.

Vi söker icke-triviala lösningar till systemet $\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}\mathbf{v} = \mathbf{0}$, vilka ges av $\mathbf{v} = r_1\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$, $r_1 \quad R$.

En komplex lösning är $\mathbf{Z} = e^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$.

Realdel respektive imaginärdel av den komplexa lösningen ger oss två linjärt oberoende lösningar.

Vi omformar den komplexa lösningen: $\mathbf{Z} = (\cos t + i\sin t)\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$.

$\operatorname{Re}\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ och $\operatorname{Im}\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$ är två linjärt oberoende lösningar till det homogena systemet.

Variation av parametrar innebär att vi behöver en fundamentalmatris $\Phi = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$.

En partikulärlösning erhålles som $\mathbf{X_p} = \Phi\int \Phi^{-1}\begin{pmatrix}\frac{1}{\cos t}\\ 0\end{pmatrix}dt$. Inversen blir $\Phi^{-1} = \begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ \sin t & -\cos t\end{pmatrix}$.

$$\int \Phi^{-1}\begin{pmatrix}\frac{1}{\cos t}\\ 0\end{pmatrix}dt = \int\begin{pmatrix}1\\ \frac{\sin t}{\cos t}\end{pmatrix}dt = \begin{pmatrix}t\\ -\ln|\cos t|\end{pmatrix} \qquad \mathbf{X_p} = \begin{pmatrix}t\cos t - \sin t\ln|\cos t|\\ t\sin t + \cos t\ln|\cos t|\end{pmatrix}$$

Den allmänna lösningen är: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ \sin t & -\cos t\end{pmatrix}\mathbf{C} + \begin{pmatrix}t\cos t - \sin t\ln|\cos t|\\ t\sin t + \cos t\ln|\cos t|\end{pmatrix}$

SVAR: a. Se ovan. b. Den allmänna lösningen är: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ \sin t & -\cos t\end{pmatrix}\mathbf{C} + \begin{pmatrix}t\cos t - \sin t\ln|\cos t|\\ t\sin t + \cos t\ln|\cos t|\end{pmatrix}$

13. Bestäm de lösningar till differentialekvationen $y'' + \lambda y = 0$, λ är större än noll, som uppfyller randvillkoren $y(0) = 0$ och $y'(L) = 0$. Visa att de erhållna funktionerna är ortogonala på intervallet $[0, L]$.

<u>Lösning:</u>

λ är större än noll gör att vi kan sätta $\lambda = \mu^2$ där $\mu \in R$.

Insättning i differentialekvationen ger $y'' + \mu^2 y = 0$. De karakteristiska rötterna är $r = \pm i\mu$.

Lösningarna är på formen $y = A\cos\mu x + B\sin\mu x$.

Vi utnyttjar de givna randvillkoren. Då behövs även $y' = -\mu A\sin\mu x + \mu B\cos\mu x$.

Randvillkoren ger oss följande system: $\begin{cases} y(0) = 0 = A \\ y'(L) = 0 = -\mu A\sin\mu L + \mu B\cos\mu L \end{cases}$.

Icke-triviala lösningarna erhålles då $\cos\mu L = 0$, dvs då $\mu L = \frac{(2n-1)\pi}{2}$, $n = 1,2,\ldots$.

De icke-triviala lösningarna är på formen $y = B_n \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2L}$, $n = 1,2,\ldots$.

Nu visar vi ortogonaliteten.

Vi visar att inre produkten $\int_0^L \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\sin\frac{(2m-1)\pi x}{2L}\,dx = 0$, $n \neq m$.

Vi omformar vänstra ledet. $VL = \frac{1}{2}\int_0^L\left\{\cos\frac{(2n-2m)\pi x}{2L} - \cos\frac{(2n+2m-2)\pi x}{2L}\right\}dx$

Integration ger: $VL = \frac{1}{2}\left[-\frac{2L}{(2n-2m)\pi}\sin\frac{(2n-2m)\pi x}{2L} + \frac{2L}{(2n-2m-2)\pi}\sin\frac{(2n-2m-2)\pi x}{2L}\right]_0^L = 0$

Vi har erhållit $\int_0^L \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\sin\frac{(2m-1)\pi x}{2L}\,dx = 0$, $n \neq m$.

SVAR: De icke-triviala lösningarna är på formen $y = B_n \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2L}$, $n = 1,2,\ldots$.

14. Bestäm en lösning till problemet $\begin{cases} u_{xx} = tu_t, & 0 \le x \le \pi,\ t \ge 1 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \ge 1 \\ u(x,1) = 4\sin^3 x, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

<u>Lösning:</u>

Då $4\sin^3 x = 3\sin x - \sin 3x$ enligt BETA, kan problemet skrivas

$$\begin{cases} u_{xx} = tu_t \quad , \quad 0 \le x \le \pi \ , \ t \ge 1 & (1) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad , t \ge 1 & (2) \\ u(x,1) = 3\sin x - \sin 3x \quad , \quad 0 \le x \le \pi & (3) \end{cases}$$

Vi använder separation av variabler och sätter $u(x,t) = X(x)T(t)$.

(1) ger $X''T = tXT'$ och $\dfrac{X''}{X} = \dfrac{tT'}{T} = -\lambda$, där λ är en konstant.

Man får dels $X'' + \lambda X = 0 \quad , X(0) = X(\pi) = 0$ och dels $tT' = -\lambda T$ dvs $T' + \dfrac{\lambda}{t} T = 0$.

Problemet för X har lösningarna $X = \sin nx \quad , n = 1 , \ 2 , \ 3 ,$ för $\lambda = n^2$.

För T fås då ekvationen $T' + \dfrac{n^2}{t} T = 0$, som har integrerande faktor $e^{n^2 \ln t} = t^{n^2}$.

Man får $t^{n^2} T' + n^2 t^{n^2 - 1} T = 0$ och $\dfrac{d}{dt}\left(t^{n^2} T\right) = 0$.

Integration ger $t^{n^2} T = C$ och $T = Ct^{-n^2}$, där C är en konstant.

Härav följer att $u_n = A_n t^{-n^2} \sin nx \quad , n = 1 , \ 2 , \ 3 , \ldots$ uppfyller (1) och (2). Här är A_n konstanter.

Genom linearitet följer att $u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \dfrac{\sin nx}{t^{n^2}}$ också uppfyller (1) och (2).

Villkoret (3) ger $u(x,1) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx = 3\sin x - \sin 3x$, vilket är uppfyllt om $A_1 = 3, \ A_3 = -1$

och alla övriga $A_n = 0$. Härav följer $u(x,t) = 3\dfrac{\sin x}{t} - \dfrac{\sin 3x}{t^9}$.

SVAR: $u(x,t) = 3\dfrac{\sin x}{t} - \dfrac{\sin 3x}{t^9}$

15. Om ingen fisk tas upp ur en sjö så varierar mängden fisk, $y(t)$ [ton], i sjön med tiden t [år] enligt differentialekvationen

$y' = \dfrac{y}{a}\left(1 - \dfrac{y}{b}\right) , \ y > 0$, där $a = 4$ [år] och $b = 80$ [ton].

Nu börjar man fiska ut c [ton] fiskar per år, (c är en positiv konstant).

a. Ange differentialekvationen för y som då gäller.

b. Ange det kritiska värde på c som inte får överskridas
om det skall finnas någon jämviktslösning > 0.

c. Då c ligger under detta kritiska värde finns det en stabil jämviktsnivå $y_0 > 0$ för mängden fisk. Bestäm y_0 som funktion av c.

<u>Lösning:</u>

a. Den korrigerade differentialekvationen blir $y' = \dfrac{y}{a}\left(1 - \dfrac{y}{b}\right) - c$.

Med de givna värdena på konstanterna får vi

$$y' = \frac{y}{4}\left(1 - \frac{y}{80}\right) - c = \frac{y(80-y)}{320} - c = \frac{y(80-y) - 320c}{320} = f(y) \ .$$

b. Jämviktslösning erhålles då $f(y) = 0$.

Då är $y^2 - 80y + 320c = 0$, $(y - 40)^2 = 1600 - 320c = 320(5 - c)$.

Reella lösningar och större än noll erhålles då $c \le 5$.

För $c > 5$ existerar inga jämviktslösningar.

Jämviktslösningarna är $y = 40 \pm \sqrt{320(5 - c)}$.

c. Vi bestämmer den stabila jämviktslösningen y_0 genom att studera tecknet hos $f'(y_0)$.

Jämviktslösningen är stabil om $f'(y_0) < 0$ och instabil om $f'(y_0) > 0$.

$f'(y) = \frac{80-2y}{320} = \frac{40-y}{160}$ och insättning av jämviktslösningarna ger

$f'(40+\sqrt{320(5-c)}) = \frac{-\sqrt{320(40-c)}}{160} < 0$ stabil jämviktslösning.

$f'(40-\sqrt{320(5-c)}) = \frac{\sqrt{320(40-c)}}{160} > 0$ instabil jämviktslösning.

SVAR:

a. Den nya differentialekvationen är $y' = \frac{y(80-y)}{320} - c$.

b. Det kritiska värde på c är $c = 5$.

c. Jämviktsnivån $y_0 = 40 + \sqrt{320(5-c)}$.