Tentamensskrivning i Differentialekvationer I, SF1633(5B1206).

Tisdagen den 12 januari 2010, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Del 1 är avsedd för betyg E och omfattar 3 uppgifter.
För betyg E krävs 3 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, A, B, C och D, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg A krävs förutom 3 godkända moduler även 15 poäng på del 2.
För betyg B krävs förutom 3 godkända moduler även 11 poäng på del 2.
För betyg C krävs förutom 3 godkända moduler även 7 poäng på del 2.
För betyg D krävs förutom 3 godkända moduler även 3 poäng på del 2.

De som har registrering på 5B1206 erhåller betyg enligt nedan.
Tentamen är tvådelad.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 3 uppgifter.
För betyg 3 krävs 3 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, 4 och 5, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg 4 krävs förutom 3 godkända moduler även 8 poäng på del 2.
För betyg 5 krävs förutom 3 godkända moduler även 14 poäng på del 2.
Uppgifterna 11-15 ger 4 poäng vardera.

Del 1

Modul 1.

I en populationsmodell är den relativa tillväxthastigheten , som funktion av antalet djur, $P(t)$, ett förstagradspolynom , nämligen en konstant, a, minus antalet djur gånger en annan konstant, b. Konstanterna är positiva. Då erhålles $\frac{1}{P(t)}\frac{dP(T)}{dt} = a - bP(t)$.

Denna modell justeras genom att ett konstant antal djur per tidsenhet, h, avlägsnas.
Den justerade matematiska modellen blir $\frac{dP(T)}{dt} = (a - bP(t))P(t) - h$.
Låt konstanterna därefter vara 5, 1 respektive 4.
Studera långtidsbeteendet av $P(t)$ för olika startvärden på populationen.

Modul 2.

Låt $y_1(x) = 5x^2$, $y_2(x) = 3x + 4x^3$, $y_3(x) = x^2 + 7x^3$, $y_4(x) = 2x + x^2$ och $y_5(x) = 2x + 3x^2 + 5x^3$ vara lösningar till en homogen linjär tredje ordningens differentialekvation.
Bestäm den entydiga lösning som uppfyller villkoren $y(1) = 2$, $y'(1) = 3$ och $y''(1) = 4$.

Modul 3.

Bestäm $y(5)$ då $y'(t) + \int_0^t e^{2u} y(t-u)\,du = \delta(t-3)$, $t \geq 0$ och $y(0) = 1$.

Del 2

11. Bestäm värdet på x så att $y(x) = 4$, då $(x-2)y' + y = 2x$ och $y(0) = 3$.

12.a. *Härled* en partikulärlösning till det linjära system $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}$, då en fundamentalmatris ges av Φ.

b. Bestäm allmänna lösningen till systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos t} \\ 0 \end{pmatrix}$, då $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$.

vgv

13. Bestäm de lösningar till differentialekvationen $y'' + \lambda y = 0$, λ är större än noll, som uppfyller randvillkoren $y(0) = 0$ och $y'(L) = 0$. Visa att de erhållna funktionerna är ortogonala på intervallet $[0, L]$.

14. Bestäm en lösning till problemet $\begin{cases} u_{xx} = t u_t \quad , \quad 0 \le x \le \pi \, , \; t \ge 1 \\ u(0,t) = u(\pi, t) = 0 \quad , \; t \ge 1 \\ u(x,1) = 4\sin^3 x \quad , \quad 0 \le x \le \pi \, . \end{cases}$

15. Om ingen fisk tas upp ur en sjö så varierar mängden fisk, $y(t)$ [ton], i sjön med tiden t [år] enligt differentialekvationen

$y' = \frac{y}{a}\left(1 - \frac{y}{b}\right)$, $y > 0$, där $a = 4$ [år] och $b = 80$ [ton].

Nu börjar man fiska ut c [ton] fiskar per år, (c är en positiv konstant).

a. Ange differentialekvationen för y som då gäller.

b. Ange det kritiska värde på c som inte får överskridas
om det skall finnas någon jämviktslösning > 0.

c. Då c ligger under detta kritiska värde finns det en stabil jämviktsnivå $y_0 > 0$ för mängden fisk. Bestäm y_0 som funktion av c.