Lösningsförslag tentamensskrivning i Differentialekvationer I, SF1633(5B1206).

Tisdagen den 25 maj 2010, kl 1400-1900.

Tillåtet hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Del 1 är avsedd för betyg E och omfattar 3 uppgifter. För betyg E krävs 3 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, A, B, C och D, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg A krävs förutom 3 godkända moduler även 15 poäng på del 2.
För betyg B krävs förutom 3 godkända moduler även 11 poäng på del 2.
För betyg C krävs förutom 3 godkända moduler även 7 poäng på del 2.
För betyg D krävs förutom 3 godkända moduler även 3 poäng på del 2.

De som har registrering på 5B1206 erhåller betyg enligt nedan.
Tentamen är tvådelad.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 3 uppgifter. För betyg 3 krävs 3 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, 4 och 5, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg 4 krävs förutom 3 godkända moduler även 8 poäng på del 2.
För betyg 5 krävs förutom 3 godkända moduler även 14 poäng på del 2.
Uppgifterna 11-14 ger 5 poäng vardera.
Examinator: Hans Tranberg.

<u>Del 1</u>

<u>Modul 1.</u>

I en tank som innehåller 400 liter vätska är 10 kg salt upplöst.
En saltlösning med koncentrationen 0,05 kg per liter pumpas in med en hastighet av 20 liter per minut.
Innehållet i tanken blandas momentant och pumpas ut med en hastighet av 40 liter per minut.
När är tanken tom ? Ställ upp en differentialekvation för saltmängden $A(t)$. Bestäm $A(t)$.

<u>Lösning:</u>

Vätskevolymen ges av $V(t) = 400 \quad t(40 \quad 20)$, $V(t) = 400 \quad 20t$. Tanken är tom då $t = 20$ minuter.
Förändringen av saltmängden per tidsenhet ges av dess tidsderivata.

Vi får följande differentialekvation: $\dfrac{dA(t)}{dt} = 20 \;\; 0,05 \quad 40 \;\; \dfrac{A(t)}{V(t)}$.

Insättning av $V(t) = 400 \quad 20t$ och förenkling ger $\dfrac{dA(t)}{dt} + \dfrac{2}{20 \quad t} A(t) = 1$.

Vi har erhållit en linjär differentialekvation av första ordningen vilken löses med hjälp av integrerande faktor.

En integrerande faktor är $e^{\frac{2}{20 \quad t}dt} = e^{\;2\ln(20 \quad t)} = \dfrac{1}{(20 \quad t)^2}$.

Multiplicerar differentialekvationen med integrerande faktor: $\dfrac{1}{(20 \quad t)^2}\dfrac{dA(t)}{dt} + \dfrac{2}{(20 \quad t)^3} A(t) = \dfrac{1}{(20 \quad t)^2}$

Det nya vänstra ledet är en derivata. $\dfrac{d}{dt} \quad \dfrac{A(t)}{(20 \quad t)^2} \quad = \dfrac{1}{(20 \quad t)^2}$.

Integrera med avseende på t: $\dfrac{A(t)}{(20 \quad t)^2} = \dfrac{1}{20 \quad t} + C$. Vid starten är saltmängden 10 kg.

Detta ger oss värdet på integrationskonstanten. $C = \dfrac{10}{(20)^2} \quad \dfrac{1}{20} = \dfrac{1}{40}$.

Saltmängden vid en godtycklig tidpunkt t är $A(t) = 20 \quad t \quad \dfrac{(20 \quad t)^2}{40}$, $A(t) = \dfrac{400 \quad t^2}{40}$.

Rimlighetskontroll ger $A(0) = 10$ och $A(20) = 0$ (Tanken är tom.)

SVAR Tanken är tom då $t = 20$ minuter. Den sökta differentialekvationen är $\dfrac{dA(t)}{dt} + \dfrac{2}{20 \quad t} A(t) = 1$.

Saltmängden $A(t) = \dfrac{400 \quad t^2}{40}$.

Modul 2.

Bestäm de stationära punkterna till systemet $\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \quad 1 \\ \frac{dy}{dt} &= x^2 \quad y \end{aligned}$ samt avgör om de är stabila eller instabila.

Lösning:

I de stationära punkterna är hastighetsvektorn $\dot{\mathbf{X}}$ lika med nollvektorn.

Detta ger oss systemet $\begin{aligned} 0 &= y \quad 1 \\ 0 &= x^2 \quad y \end{aligned}$, vilket har lösningarna (1,1) och (-1,1).

För att undersöka stabilitet linjariserar vi systemet med hjälp av Jacobimatrisen.

Systemets Jacobimatris blir $\mathbf{J}(x,y) = \begin{matrix} 0 & 1 \\ 2x & \quad 1 \end{matrix}$.

Insättning av de stationära punkterna ger konstanta matriser vars egenvärden vi bestämmer.

Egenvärden till en matris $\mathbf{D}$ erhålles ur ekvationen $\det(\mathbf{D} \quad \mathbf{I}) = 0$

(1,1)

$\mathbf{J}(1,1) = \begin{matrix} 0 & 1 \\ 2 & \quad 1 \end{matrix} = \mathbf{A}$. Vi får $\begin{vmatrix} 0 & \quad 1 \\ 2 & \quad 1 \end{vmatrix} = 0$, $\quad ^2 + \quad 2 = 0$, $\quad _1 = 1$, $\quad _2 = \quad 2$.

(1,1) är instabil, ty ett av egenvärdena är positivt. Detta gäller även för det ursprungliga systemet.

(-1,1)

$\mathbf{J}(\quad 1,1) = \begin{matrix} 0 & 1 \\ 2 & \quad 1 \end{matrix} = \mathbf{B}$. Vi får $\begin{vmatrix} 0 & \quad 1 \\ 2 & \quad 1 \end{vmatrix} = 0$, $\quad ^2 + \quad + 2 = 0$, $(\quad + \frac{1}{2})^2 = \quad \frac{7}{4}$.

(-1,1) är stabil, ty realdelen hos de komplexa egenvärdena är positivt.

Detta gäller även för det ursprungliga systemet.

SVAR: (1,1) är en instabil stationär punkt och (-1,1) är stabil stationär punkt.

Modul 3.

Bestäm genom variabelseparation den lösning till den partiella differentialekvationen $u_x + u_y = u$ som uppfyller villkoret $u(0,y) = 2e^{3y} + 5e^{\quad 4y}$.

Lösning:

Vi ansätter $u(x,y) = X(x)Y(y)$.

Insättning i den partiella differentialekvationen ger $X\ (x)Y(y) + X(x)Y\ (y) = X(x)Y(y)$.

Dividera med $X(x)Y(y)$: $\frac{X\ (x)}{X(x)} + \frac{Y\ (y)}{Y(y)} = 1$, $\frac{Y\ (y)}{Y(y)} = 1 \quad \frac{X\ (x)}{X(x)} = \text{konstant} = \quad$.

Den partiella differentialekvationen övergår i ett system av ordinära differentialekvationer.

$$\begin{aligned} &Y\ (y) \quad Y(y) = 0 \\ &X\ (x) \quad (1 \quad)X(x) = 0 \end{aligned}$$

Systemets lösningar erhålles med hjälp av karakteristiska ekvationer.

$$\begin{aligned} X(x) &= Ae^{(1 \quad)x} \\ Y(y) &= Be^{\quad y} \end{aligned}$$

Variabelseparationen ger att $ABe^{(1 \quad)x}e^{\quad y}$ är en lösning för varje $\quad$.

Även linjärkombinationer av dessa lösningar är lösning $u(x,y) = \quad c\ e^{(1\forall \quad)x}e^{\quad y}$.

Villkoret ger oss konstanterna. $\underset{\forall}{\quad} c\ e^{\quad y} = u(0,y) = 2e^{3y} + 5e^{\quad 4y}$.

Identifiering ger $\quad _1 = 3$, $c_3 = 2$, $\quad _2 = \quad 4$, $c_{\quad 4} = 5$ övriga $c \quad = 0$ och $u(x,y) = 2e^{\quad 2x+3y} + 5e^{5x \quad 4y}$.

SVAR: Den sökta lösningen är $u(x,y) = 2e^{\quad 2x+3y} + 5e^{5x \quad 4y}$.

Del 2

11. Är följande påståenden a-b sanna eller falska ? Motivera !

a) Låt $y = g(x)$ vara en lösning till differentialekvationen $y \quad = 1 + y^2$.
Lösningskurvan har lokala extrempunkter.

b) Betrakta differentialekvationen $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, där f och $\frac{f}{y}$ är kontinuerliga i ett rektangulärt område R i xy-planet. Två skilda lösningskurvor kan skära varandra i en punkt.

c) Bestäm de stationära lösningarna till den autonoma differentialekvationen $\frac{dy}{dt} = (y \quad 3)(y \quad 2)$.

Bestäm även den lösning som uppfyller villkoret $y(0) = \frac{5}{2}$ respektive $y(0) = \frac{7}{2}$.

Avgör slutligen vad som händer då t växer för alla startvärden $y(0)$.

Lösning:

a) Falskt, ty i en lokal extrempunkt är derivatan lika med noll. Här är derivatan större eller lika med ett.
b) Falskt, ty villkoren i entydighetssatsen är uppfyllda.
c) För de stationära lösningarna är derivatan lika med noll.. Vi får $y_1 = 3$ och $y_2 = 2$

Med $(y \quad 3)(y \quad 2) \quad 0$ övergår differentialekvationen i $\frac{1}{(y \quad 3)(y \quad 2)} \frac{dy}{dt} = 1$.

Partialbråksuppdelning och integration med avseende på t ger:

$$\frac{1}{y \quad 3} \quad \frac{1}{y \quad 2} \frac{dy}{dt} = 1 \text{, } \ln\left|\frac{y \quad 3}{y \quad 2}\right| = t + \ln|C_1| \text{, } \frac{y \quad 3}{y \quad 2} = Ce^t \text{, } y = \frac{3 \quad 2Ce^t}{1 \quad Ce^t} \text{ .}$$

Villkoret $y(0) = \frac{5}{2}$ ger $C = \frac{\frac{5}{2} \quad 3}{\frac{5}{2} \quad 2} = \quad 1$ och $y = \frac{3 + 2e^t}{1 + e^t}$.

Villkoret $y(0) = \frac{7}{2}$ ger $C = \frac{\frac{7}{2} \quad 3}{\frac{7}{2} \quad 2} = \frac{1}{3}$ och $y = \frac{9 \quad 2e^t}{3 \quad e^t}$.

För startvärden $y(0) < 3$ går y mot två då t växer.
För startvärdet $y(0) = 3$ är y konstant lika med tre.
För startvärden $y(0) > 3$ går växer y obegränsat då t växer.

SVAR: a) och b) är falska.

c) Stationära lösningar är $y_1 = 3$ och $y_2 = 2$.

De sökta lösningarna är $y = \frac{3 + 2e^t}{1 + e^t}$ respektive $y = \frac{9 \quad 2e^t}{3 \quad e^t}$.

För startvärden $y(0) < 3$ går y mot två då t växer.
För startvärdet $y(0) = 3$ är y konstant lika med tre.
För startvärden $y(0) > 3$ går växer y obegränsat då t växer.

12.a. Visa att $\{e^{2t}, e^{\quad t}\}$ kan bilda en fundamentalmängd av lösningar till en linjär homogen andra ordningens differentialekvation med konstanta koefficienter. Ange dess allmänna lösning.

b. Bestäm två linjärt oberoende lösningar till systemet $\mathbf{X} \quad = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{matrix} \mathbf{X}$ samt ange dess allmänna lösning.

c. Jämför resultaten i a och b.

Lösning:

a. Vi visar att de två funktionerna är linjärt oberoende med hjälp av Wronskianen som skall vara skild ifrån noll.

$W(e^{2t}, e^{\quad t}) = \begin{vmatrix} e^{2t} & e^{\quad t} \\ 2e^{2t} & e^{\quad t} \end{vmatrix} = \quad e^t \quad 2e^t = \quad 3e^t \quad 0$ (Det kan även inses genom att $e^{2t} \quad ke^{\quad t}$, k är en konstant.)

Den allmänna lösningen ges av en linjärkombination av de två funktionerna: $c_1 e^{2t} + c_2 e^{\ t}$.

b. Vi bestämmer egenvärden och tillhorande egenvektorer till matrisen $\mathbf{A} = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{matrix}$.

$$0 = \det(\mathbf{A} \quad \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & \end{vmatrix} = \ ^2 \qquad 2 = (\quad +1)(\quad 2)\ , \quad _1 = \quad 1\ , \quad _2 = 2 .$$

$_1 = \quad 1$ insatt i systemet $(\mathbf{A} \quad \mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}$ ger systemet $\begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix} \mathbf{K} = \mathbf{0}$, $\mathbf{K}_1 = \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}$. $\mathbf{X}_1 = e^{\ t} \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}$

$_2 = 2$ insatt i systemet $(\mathbf{A} \quad \mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}$ ger systemet $\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{matrix} \mathbf{K} = \mathbf{0}$, $\mathbf{K}_2 = \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$.$\mathbf{X}_2 = e^{2t} \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$

Den allmänna lösningen ges av $\mathbf{X} = a_1 e^{\ t} \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} + a_2 e^{2t} \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$.

c. Differentialekvationen i deluppgift a kan skrivas $(D \quad 2)(D \quad (\quad 1))y = 0$ eller $y \quad y \quad 2y = 0$.

Denna differentialekvation kan skrivas som ett system genom att sätta $\begin{matrix} x = y \\ x \ = y \ = y \ + 2y = x + 2y \end{matrix}$.

På matrisform blir detta $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = \begin{matrix} x + 2y \\ x \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{matrix} \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$. Systemet i b representerar ekvationen i a.

Lösningarna i a och b är uppbyggda av samma funktioner, dvs e^{2t} och $e^{\ t}$.

SVAR: a. Den allmänna lösningen ges av: $c_1 e^{2t} + c_2 e^{\ t}$.

b. $\mathbf{X}_1 = e^{\ t} \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}$ och $\mathbf{X}_2 = e^{2t} \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$ är två linjärt oberoende lösningar.

Den allmänna lösningen ges av $\mathbf{X} = a_1 e^{\ t} \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} + a_2 e^{2t} \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$.

c. Se ovan.

13.a. Utveckla den 2 -periodiska funktionen $f(x) = \begin{matrix} 0 & , & x \quad 0 \\ x & , & 0 < x < \end{matrix}$ i en fourierserie.

b. Beräkna summan $\displaystyle \sum_{k=0} \frac{(\quad 1)^k}{2k+1}$ genom att beräkna fourierseriens summa i en lämplig punkt.

c. Beräkna summan $\displaystyle \sum_{k=0} \frac{1}{(2k+1)^2}$ genom att beräkna fourierseriens summa i en lämplig punkt.

<u>Lösning:</u>

a. Fourierserien är på formen $\displaystyle \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1} a_n \cos\frac{n \ x}{} + b_n \sin\frac{n \ x}{} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1} a_n \cos nx + b_n \sin nx$

där $\displaystyle a_0 = \frac{1}{} \int f(x)\,dx = \frac{1}{} \int_0 (\quad x)dx = \frac{}{2}$,

$$a_n = \frac{1}{} \int f(x) \cos nx dx = \frac{1}{} \int_0 (\quad x)\cos nx dx = \frac{1}{} \left[(\quad x)\frac{\sin nx}{n} \right]_0 \int_0 \frac{\sin nx}{n}(\quad 1)dx$$

$$a_n = \frac{1}{} \left[\quad \frac{\cos nx}{n^2} \right]_0 = \frac{1 \quad \cos n}{n^2} = \frac{1 \quad (\quad 1)^n}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{} \quad f(x)\sin nx dx = \frac{1}{} \underset{0}{} (\quad x)\sin nx dx = \frac{1}{} \left[(\quad x)\frac{\cos nx}{n} \right]_0 \quad {}_0 \frac{\cos nx}{n} (\quad 1)dx$$

$$b_n = \frac{1}{} \quad \frac{}{n} + \left[\frac{\sin nx}{n^2} \right]_0 \quad = \frac{1}{n}$$

Funktionen f tilldelas fourierserien $\frac{}{4} + \underset{n=1}{} \frac{1 \quad (\quad 1)^n}{n^2} \cos nx + \frac{1}{n} \sin nx \quad$.

$$f(x) \sim \frac{}{4} + \underset{n=1}{} \frac{1 \quad (\quad 1)^n}{n^2} \cos nx + \frac{1}{n} \sin nx$$

b. Vi väljer $x = \frac{}{2}$. Eftersom det är en kontinuitetspunkt för funktionen f får vi följande

$$\frac{}{2} = \frac{}{4} + \underset{n=1}{} \frac{1 \quad (\quad 1)^n}{n^2} \cos n \frac{}{2} + \frac{1}{n} \sin n \frac{}{2}$$

För jämna heltal blir seriens termer lika med noll. Det är endast de udda heltalen som ger bidrag.

Med $n = 2k + 1$ får vi: $\underset{k=0}{} \frac{(\quad 1)^k}{2k+1} \quad = \frac{}{4}$, ty $\sin(2k+1)\frac{}{2} = \sin(k \quad + \frac{}{2}) = \cos k \quad \sin \frac{}{2} = (\quad 1)^k$.

c. Vi väljer $x = 0$. Eftersom det är en diskontinuitetspunkt för funktionen f får vi följande

$$\frac{1}{2}(\quad 0) = \frac{}{4} + \underset{n=1}{} \frac{1 \quad (\quad 1)^n}{n^2}$$

För jämna heltal blir seriens termer lika med noll. Det är endast de udda heltalen som ger bidrag.

Med $n = 2k + 1$ får vi $\frac{^2}{4} = \underset{k=0}{} \frac{2}{(2k+1)^2}$, $\underset{k=0}{} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{^2}{8}$.

SVAR: a. Funktionen f tilldelas fourierserien $\frac{}{4} + \underset{n=1}{} \frac{1 \quad (\quad 1)^n}{n^2} \cos nx + \frac{1}{n} \sin nx \quad$.

b. $\underset{k=0}{} \frac{(\quad 1)^k}{2k+1} \quad = \frac{}{4}$ c. $\underset{k=0}{} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{^2}{8}$

14.a. Låt $f(t)$ vara styckvis kontinuerlig på $[0, \quad)$, av exponentiell ordning och periodisk med perioden T .

Härled f :s Laplacetransform $F(s) = \frac{1}{1 \quad e^{\quad sT}} \overset{T}{\underset{0}{}} e^{\quad st} f(t)dt$ utgående från definitionen.

b. Begynnelsevärdesproblemet $y \quad + y = \quad {}_a(t)$, $t > 0$, $y(0) = y \quad (0) = 0$ beskriver en svängningskrets med en högfrekvent insignal $\quad {}_a(t)$, nämnligen fyrkants-vågen $\quad {}_a(t) = \begin{matrix} 1 \ , \ 0 \quad < t < a \\ 0 \ , \ a < t < 2a \end{matrix}$ och

$\quad {}_a(t + 2a) = \quad {}_a(t)$, där a är ett litet tal.

Lösningen $y(t)$ beror på a , $y(t) = y_a(t)$. Bestäm gränsfunktionen $y_0(t) = \lim_{a \quad 0} y_a(t)$.

Ledning: Gränsövergången kan med fördel göras på Laplacetransformsidan.

<u>Lösning</u>:

a) Enligt definitionen på Laplacetransform får vi $F(s) = \underset{0}{} e^{\quad st} f(t)dt = \overset{T}{\underset{0}{}} e^{\quad st} f(t)dt + \underset{T}{} e^{\quad st} f(t)dt$,

där vi har delat upp integralen i två delar. I den andra integralen gör vi substitutionen $u = t \quad T$ och erhåller ur detta $du = dt$ samt nya gränser.

Insättning i integralen ger $\underset{T}{} e^{\quad st} f(t)dt = \underset{0}{} e^{\quad s(u+T)} f(u+T)du = e^{\quad sT} \underset{0}{} e^{\quad su} f(u+T)du$.

f är periodisk med perioden T, vilket innebär att $f(u+T) = f(u)$.

Insättning i integralen ger $\;_{T}\; e^{\;st} f(t)dt = e^{\;sT} \;{}_{0}\; e^{\;su} f(u)du = e^{\;sT} F(s)$.

Insättning i den första ekvationen ger $F(s) = {}_{0}^{T}\; e^{\;st} f(t)dt + e^{\;sT} F(s)$.

Lös ut $F(s)$, vilket ger $F(s) = \dfrac{1}{1 \quad e^{\;sT}} {}_{0}^{T}\; e^{\;st} f(t)dt$. vsv.

b. Laplacetransformera differentialekvationen.

$$s^2 Y(s) + Y(s) = \frac{1}{1 \quad e^{\;s2a}} {}_{0}^{2a}\; {}_{a}(t) e^{\;st} dt \;, \quad {}_{0}^{2a}\; {}_{a}(t) e^{\;st} dt = {}_{0}^{a}\; 1 e^{\;st} dt = \left.\frac{e^{\;st}}{s}\right|_{0}^{a} = \frac{1 \quad e^{\;sa}}{s}$$

$Y(s) = \dfrac{1}{1 + e^{\;sa}} \dfrac{1}{s(s^2+1)}$. Låt $a \quad 0$: $L\{y_0(t)\} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{s(s^2+1)} = \dfrac{1}{2}\;\dfrac{1}{s} \quad \dfrac{s}{s^2+1}$.

Återtransformera: $y_0(t) = \dfrac{1}{2}\{1 \quad \cos t\}$.

SVAR: a. Se ovan. b. Gränsfunktionen $y_0(t) = \dfrac{1}{2}\{1 \quad \cos t\}$.