Tentamensskrivning i Differentialekvationer I, SF1633(5B1206).

Tisdagen den 25 maj 2010, kl 1400-1900.

Tillåtet hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Del 1 är avsedd för betyg E och omfattar 3 uppgifter. För betyg E krävs 3 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, A, B, C och D, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg A krävs förutom 3 godkända moduler även 15 poäng på del 2.
För betyg B krävs förutom 3 godkända moduler även 11 poäng på del 2.
För betyg C krävs förutom 3 godkända moduler även 7 poäng på del 2.
För betyg D krävs förutom 3 godkända moduler även 3 poäng på del 2.

De som har registrering på 5B1206 erhåller betyg enligt nedan.
Tentamen är tvådelad.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 3 uppgifter. För betyg 3 krävs 3 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, 4 och 5, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg 4 krävs förutom 3 godkända moduler även 8 poäng på del 2.
För betyg 5 krävs förutom 3 godkända moduler även 14 poäng på del 2.
Uppgifterna 11-14 ger 5 poäng vardera.
Examinator: Hans Tranberg.

<u>Del 1</u>

<u>Modul 1.</u>
I en tank som innehåller 400 liter vätska är 10 kg salt upplöst.
En saltlösning med koncentrationen 0,05 kg per liter pumpas in med en hastighet av 20 liter per minut.
Innehållet i tanken blandas momentant och pumpas ut med en hastighet av 40 liter per minut.
När är tanken tom ? Ställ upp en differentialekvation för saltmängden $A(t)$. Bestäm $A(t)$.

<u>Modul 2.</u>

Bestäm de stationära punkterna till systemet $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \quad 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = x^2 \quad y \end{cases}$ samt avgör om de är stabila eller instabila.

<u>Modul 3.</u>
Bestäm genom variabelseparation den lösning till den partiella differentialekvationen $u_x + u_y \ = u$ som uppfyller villkoret $u(0, y) = 2e^{3y} + 5e^{\ 4y}$.

<u>Del 2</u>

11. Är följande påståenden a-b sanna eller falska ? Motivera !

a) Låt $y = g(x)$ vara en lösning till differentialekvationen $y \ = 1 + y^2$.
Lösningskurvan har lokala extrempunkter.

b) Betrakta differentialekvationen $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$, där f och $\dfrac{\ f}{\ y}$ är kontinuerliga i ett rektangulärt område R i xy-planet. Två skilda lösningskurvor kan skära varandra i en punkt.

c) Bestäm de stationära lösningarna till den autonoma differentialekvationen $\dfrac{dy}{dt} = (y \quad 3)(y \quad 2)$.

Bestäm även den lösning som uppfyller villkoret $y(0) = \dfrac{5}{2}$ respektive $y(0) = \dfrac{7}{2}$.

Avgör slutligen vad som händer då t växer för alla startvärden $y(0)$.

12.a. Visa att $\{e^{2t}, e^{-t}\}$ kan bilda en fundamentalmängd av lösningar till en linjär homogen andra ordningens differentialekvation med konstanta koefficienter. Ange dess allmänna lösning.

b. Bestäm två linjärt oberoende lösningar till systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}$ samt ange dess allmänna lösning.

c. Jämför resultaten i a och b.

13.a. Utveckla den 2π-periodiska funktionen $f(x) = \begin{cases} 0 & , \; -\pi < x \le 0 \\ x \, , & 0 < x < \pi \end{cases}$ i en fourierserie.

b. Beräkna summan $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ genom att beräkna fourierseriens summa i en lämplig punkt.

c. Beräkna summan $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ genom att beräkna fourierseriens summa i en lämplig punkt.

14.a. Låt $f(t)$ vara styckvis kontinuerlig på $[0, \infty)$, av exponentiell ordning och periodisk med perioden T.

Härled f:s Laplacetransform $F(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt$ utgående från definitionen.

b. Begynnelsevärdesproblemet $y'' + y = \varphi_a(t)$, $t > 0$, $y(0) = y'(0) = 0$ beskriver en svängningskrets med en högfrekvent insignal $\varphi_a(t)$, nämnligen fyrkants-vågen $\varphi_a(t) = \begin{cases} 1 \, , & 0 < t < a \\ 0 \, , & a < t < 2a \end{cases}$ och $\varphi_a(t + 2a) = \varphi_a(t)$, där a är ett litet tal.

Lösningen $y(t)$ beror på a, $y(t) = y_a(t)$. Bestäm gränsfunktionen $y_0(t) = \lim_{a \to 0} y_a(t)$.

Ledning: Gränsövergången kan med fördel göras på Laplacetransformsidan.