Kompletteringstentamen i Differentialekvationer I, SF1633(5B1206).

Onsdagen den 9 juni 2010, kl 1430-1530.

Tillåtet hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

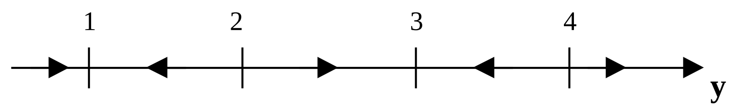
För betyg E krävs 3 godkända moduler.
De som har registrering på 5B1206 erhåller betyg enligt nedan.
För betyg 3 krävs 3 godkända moduler.
Examinator: Hans Tranberg.

<u>Modul 1.</u>

Bestäm alla startvärden $y(0)$ så att $\lim_{t\to\infty} y(t)$ existerar då $y(t)$ uppfyller den autonoma differentialekvationen $\dfrac{dy}{dt} = (y-4)(y-3)(y-2)(y-1)$. Bestäm även tillhörande gränsvärden.

<u>Lösning:</u>

Vi börjar med att bestämma stationära lösningar. Då är derivatan lika med noll.
Vi erhåller: $y_1 = 1,\ y_2 = 2,\ y_3 = 3$ och $y_4 = 4$.
Nu över till studie av derivatans tecken och redovisar resultatet i det endimensionella fasporträttet, där funktionens växande respektive avtagande markeras med pilar.



Från fasporträttet får vi följande: $\begin{cases} y(0) = 4, & \lim_{t\to\infty} y(t) = 4 \\ 2 < y(0) < 4, & \lim_{t\to\infty} y(t) = 3 \\ y(0) = 2, & \lim_{t\to\infty} y(t) = 2 \\ y(0) < 2, & \lim_{t\to\infty} y(t) = 1 \end{cases}$.

Med startvärden större än fyra existerar ej gränsvärdet.
SVAR: Gränsvärdet $\lim_{t\to\infty} y(t)$ existerar för alla startvärden $y(0)$ mindre eller lika med fyra.
Vi har följande utfall $y(0) = 4 \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = 4$, $2 < y(0) < 4 \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = 3$
$y(0) = 2 \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = 2$ och $y(0) < 2 \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = 1$.

<u>Modul 2.</u>

Bestäm den allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 11 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{X}$.

Låt systemet representera hastighetsfältet för en partikel.

Vad händer efter lång tid med en partikel placerad i $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix}$?

<u>Lösning:</u>

Bestäm egenvärden och tillhörande egenvektorer till matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 11 & -2 \end{pmatrix}$.

Dessa erhålles ur ekvationen $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 2 \\ 11 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 36 = (\lambda + 4)(\lambda - 9)$.

Egenvektorerna bestäms med hjälp av ekvationen $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}$.

$\lambda_1 = -4$ ger $\begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{K} = \mathbf{0}$, $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 9$ ger $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 11 & -11 \end{pmatrix}\mathbf{K} = \mathbf{0}$, $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Den allmänna lösningen är $\mathbf{X} = c_1 e^{-4t}\begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix} + c_2 e^{9t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Eftersom partikeln placeras på den egenvektor som hör till det negativa egenvärdet kommer partikeln att gå mot origo.

SVAR: Den allmänna lösningen är $\mathbf{X} = c_1 e^{-4t}\begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix} + c_2 e^{9t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Partikeln går mot origo.

<u>Modul 3.</u>

Lös ekvationen $y(t) + 2\int_0^t y(v)\cos(t - v)\,dv = e^{-t}, \; t > 0$

<u>Lösning:</u>

Vi laplacetransformerar ekvationen.

(L12), (L25) och (L21) ger oss: $Y(s) + 2Y(s)\dfrac{s}{s^2+1} = \dfrac{1}{s+1}$.

Lös ut $Y(s) = \dfrac{s^2+1}{(s+1)^3}$ vilket omformas till $Y(s) = \dfrac{(s+1)^2 - 2(s+1) + 2}{(s+1)^3} = G(s+1)$.

Vi återtransformerar först $G(s) = \dfrac{1}{s} - \dfrac{2}{s^2} + \dfrac{2}{s^3}$. (L18) och (L20) ger $g(t) = 1 - 2t + t^2$.

Slutligen ger (L5) oss den sökta funktionen. $y(t) = e^{-t}g(t) = e^{-t}(1 - 2t + t^2)$.

(Låt t gå mot noll i ekvationen samt i lösningen. I bägge fallen blir det ett. Rimlighetskontroll.)

SVAR: Ekvationens lösning är $y(t) = e^{-t}(1 - 2t + t^2)$.