Lösningsförslag till tentamensskrivning i Differentialekvationer I, SF1633(5B1206).

Tisdagen den 17 augusti 2010, kl 1400-1900.

Tillåtet hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Del 1 är avsedd för betyg E och omfattar 3 uppgifter. För betyg E krävs 3 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, A, B, C och D, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg A krävs förutom 3 godkända moduler även 15 poäng på del 2.
För betyg B krävs förutom 3 godkända moduler även 11 poäng på del 2.
För betyg C krävs förutom 3 godkända moduler även 7 poäng på del 2.
För betyg D krävs förutom 3 godkända moduler även 3 poäng på del 2.

De som har registrering på 5B1206 erhåller betyg enligt nedan.
Tentamen är tvådelad.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 3 uppgifter. För betyg 3 krävs 3 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, 4 och 5, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg 4 krävs förutom 3 godkända moduler även 8 poäng på del 2.
För betyg 5 krävs förutom 3 godkända moduler även 14 poäng på del 2.
Uppgifterna 11-15 ger 4 poäng vardera.
Examinator: Hans Tranberg.

<u>Del 1</u>

<u>Modul 1.</u>

Då en produkt tas ut ur en ugn har den temperaturen 700°C (Celsius). Den svalnar därefter med en avsvalningstakt som är proportionell mot skillnaden i temperatur mellan produkten själv och det omgivande rummet. En konsult har hyrts in för att utreda denna avsvalningsprocess.
Konsulten föreslår två olika matematiska modeller.
Låt $T(t)$ vara produktens temperatur vid tiden t.

Modell1: $\dfrac{dT}{dt} = -\dfrac{T-40}{3}$. Modell 2: $\dfrac{dT}{dt} = \dfrac{T-30}{3}$.

Avgör vilken modell som kan vara lämplig och bestäm dess lösning.
Vad är produktens temperatur efter lång tid ?

<u>Lösning:</u>

Eftersom det är en avsvalningsprocess är det endast modell 1 som är rimlig, ty i modell 2 kommer temperaturen att växa obegränsat. Derivatan anger temperaturens förändringshastighet.
Differentialekvationerna är linjära av första ordningen.
Lösningen fås som allmän homogen lösning plus en partikulär lösning.
Modell 1:

$$T(t) = Ae^{-\frac{t}{3}} + 40$$

Vid $t = 0$ är $T = 700$. Detta ger $A = 660$.

Vi får $T(t) = 660e^{-\frac{t}{3}} + 40$. Efter lång tid blir produktens temperatur 40 " C.

SVAR: Endast modell 1 är rimlig. Modell 1: $T(t) = 660e^{-\frac{t}{3}} + 40$.
Produktens temperatur blir 40 " C.

<u>Modul 2.</u>

Låt $y = x^a,\ a \quad R$ vara en lösning till differentialekvationen $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$.
Bestäm två linjärt oberoende lösningar till differentialekvationen. Låt vidare $y_p = x^3$ vara en partikulärlösning till den inhomogena differentialekvationen $x^2y'' + 4xy' + 2y = f(x)$. Bestäm $f(x)$.
Ange slutligen den allmänna lösningen till den inhomogena differentialekvationen.

<u>Lösning:</u>

Insättning av $y = x^a$ i den homogena differentialekvationen ger $x^2a(a-1)x^{a-2} + 4xax^{a-1} + 2x^a = 0$.
Vi får $(a(a-1) + 4a + 2)x^a = 0$ vilket medför att $a^2 + 3a + 2 = 0$.
Andragradsekvationens rötter är $a_1 = -1$ och $a_2 = -2$. Två lösningar är $y_1 = x^{-1}$ och $y_2 = x^{-2}$.

Dessa lösningar är linjärt oberoende ty $x^{-1} \neq bx^{-2}$ där b är konstant.
Alternativt kan Wronskianen skilt ifrån noll användas.
Den sökta funktionen $f(x)$ erhålles genom insättning av partikulärlösningen $y_p = x^3$ i den inhomogena differentialekvationen $x^2y'' + 4xy' + 2y = f(x)$. Vi får $f(x) = x^2 6x + 4x3x^2 + 2x^3 = 20x^3$.
Den allmänna lösningen är summan av den allmänna homogena lösningen och en partikulärlösning.
Vi erhåller således $y = c_1x^{-1} + c_2x^{-2} + x^3$.

SVAR: Två linjärt oberoende lösningar är $y_1 = x^{-1}$ och $y_2 = x^{-2}$. $f(x) = 20x^3$

Den allmänna lösningen är $y = c_1x^{-1} + c_2x^{-2} + x^3$.

Modul 3.

Bestäm koefficienterna a_n , $n = 0,\ 1,\ 2,\ ..$ då $\sin^2 x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$.

Lösning:

De sökta koefficienterna är fourierkoefficienterna till den jämna funktionen $f(x) = \sin^2 x$.

Fourierutvecklingen har formen $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ där koefficienter ges av $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$.

Omskrivning av $f(x) = \sin^2 x$ är nödvändig och vi får $f(x) = \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.

Identifiering ger koefficienterna $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$ och övriga koefficienter lika med noll.

SVAR: $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$ och övriga $a_n = 0$.

Del 2

11. Differentialekvationen $xy' - y = x^2,\ x > 0$ har en lösning som också satisfierar differentialekvationen $x^3y' - x^2y = y^2,\ x > 0$. Bestäm denna lösning.
Bestäm den lösning som uppfyller $x^3y' - x^2y = y^2,\ x > 0$ och villkoret $y(1) = 2$.
Ange även lösningens existensintervall.

Lösning:

Vi börjar med att lösa $xy' - y = x^2,\ x > 0$. Den är linjär av första ordningen.
Lösningen kan erhållas som summan av allmänna homogena lösningen och en partikulärlösning.
Vi får $y = Cx + x^2$.
En annan variant är att bestämma lösningen med hjälp av integrerande faktor.

$$y' - \frac{1}{x}y = x\ ,\ \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 1\ ,\ \left(\frac{1}{x}y\right)' = 1\ ,\ \frac{y}{x} = x + C$$

Nu över till $x^3y' - x^2y = y^2,\ x > 0$ vilken är av Bernoulli typ.
Omforma först till $x^3y^{-2}y' - x^2y^{-1} = 1$ och sätt därefter $z = y^{-1},\ z' = -y^{-2}y'$.
Insättning i $x^3y^{-2}y' - x^2y^{-1} = 1$ ger $-x^3z' - x^2z = 1$, $x^3z' + x^2z = -1$, $xz' + z = -x^{-2}$.
Det nya vänstra ledet är en derivata. Integrera me avseende på x: $xz = x^{-1} + B$.
$z = y^{-1}$ ger $y^{-1} = x^{-2} + Bx^{-1} = x^{-2}(1 + Bx)$ och vi får $y = \frac{x^2}{1 + Bx}$.
Den gemensamma lösning är $y = x^2$ vilken erhålles för $C = B = 0$.
Villkoret $y(1) = 2$ i $y = \frac{x^2}{1 + Bx}$ ger $2 = \frac{1}{1 + B}$, $B = -\frac{1}{2}$ och $y = \frac{2x^2}{2 - x}$.
Lösningens existensintervall är $\{x\ :\ 0 < x < 2\}$.
SVAR:

Den gemensamma lösningen är $y = x^2$.

Begynnelsevärdesproblemets lösning är $y = \dfrac{2x^2}{2-x}$ och dess existensintervall är $\{x \ : \ 0 < x < 2\}$.

12.a) Låt $\mathbf{A}$ vara en reell matris.
Betrakta det homogena systemet av linjära differentialekvationer $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$.
En lösning till detta system ges av $\mathbf{Z} = \mathbf{X}_1 + i\ \mathbf{X}_2$, där $\mathbf{X}_1$ och $\mathbf{X}_2$ är reell- och vektorvärda funktioner.
Visa att även $\mathbf{X}_1$ och $\mathbf{X}_2$ uppfyller systemet.

b) Bestäm allmänna lösningen till systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{X}$.

c) Vad händer med en partikel som placeras i punkten (3,4) efter lång tid?

<u>Lösning:</u>
a) Vi vet att $\mathbf{Z} = \mathbf{X}_1 + i\ \mathbf{X}_2$ satisfierar systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$.
Insättning ger $(\mathbf{X}_1 + i\ \mathbf{X}_2)' = \mathbf{A}(\mathbf{X}_1 + i\ \mathbf{X}_2)$.
Vi får: $\mathbf{X}_1' + i\ \mathbf{X}_2' = \mathbf{A}\mathbf{X}_1 + i\ \mathbf{A}\mathbf{X}_2$.

Realdelen respektive imaginärdelen är: $\begin{cases} \text{Re}: \ \mathbf{X}_1' = \mathbf{A}\mathbf{X}_1 \\ \text{Im}: \ \mathbf{X}_2' = \mathbf{A}\mathbf{X}_2 \end{cases}$.

b) Vi bestämmer först egenvärdena till matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

Dessa erhålles ur ekvationen $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 5 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 17 = (\lambda + 1)^2 + 16$.

Egenvärdena är $\lambda = -1 \pm 4i$.
Vi bestämmer en egenvektor till egenvärdet $\lambda = -1 + 4i$.

Denna fås ur ekvationen $\mathbf{0} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 5 & -3-\lambda \end{pmatrix}\mathbf{v}$ med $\lambda = -1 + 4i$ insatt.

Vi får $\begin{pmatrix} 2-4i & -4 \\ 5 & -2-4i \end{pmatrix}\mathbf{v} = \mathbf{0}$. En lösning är $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-2i \end{pmatrix}$.

En komplex lösning är $\mathbf{Z} = \mathbf{e}^{(-1+4i)t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1-2i \end{pmatrix} = \mathbf{e}^{-t}(\cos 4t + i\sin 4t)(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix})$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{e}^{-t}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\cos 4t - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}\sin 4t\right\} + i\mathbf{e}^{-t}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\sin 4t + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}\cos 4t\right\}.$$

Realdel respektive imaginärdel av den komplexa lösningen ger två reella linjärt oberoende lösningar.

$$\begin{cases} \text{Re}\mathbf{Z} = \mathbf{X}_1 = \mathbf{e}^{-t}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\cos 4t - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}\sin 4t\right\} = \mathbf{e}^{-t}\begin{pmatrix} 2\cos 4t \\ \cos 4t + 2\sin 4t \end{pmatrix} \\ \text{Im}\mathbf{Z} = \mathbf{X}_2 = \mathbf{e}^{-t}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\sin 4t + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}\cos 4t\right\} = \mathbf{e}^{-t}\begin{pmatrix} 2\sin 4t \\ \sin 4t - 2\cos 4t \end{pmatrix} \end{cases}$$

Den allmänna lösningen ges av en linjärkombination av de två linjärt oberoende lösningarna.

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 2\cos 4t \\ \cos 4t + 2\sin 4t \end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix} 2\sin 4t \\ \sin 4t - 2\cos 4t \end{pmatrix}$$

eller med hjälp av en fundamentalmatris

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2e^{-t}\cos 4t & 2e^{-t}\sin 4t \\ e^{-t}(\cos 4t + 2\sin 4t) & e^{-t}(\sin 4t - 2\cos 4t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

c) En partikel placerad i punkten (3,4) kommer efter lång tid att hamna i origo,
ty komplexa egenvärden med negativ realdel ger en inåtgående spiral.

SVAR: a) Se ovan .

b) Den allmänna lösningen är $\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 2\cos 4t \\ \cos 4t + 2\sin 4t \end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix} 2\sin 4t \\ \sin 4t - 2\cos 4t \end{pmatrix}$.

c) Partikeln kommer att hamna i origo.

13.a. Låt y_1 vara en icke-trivial lösning till den homogena differentialekvationen $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$.

<u>Härled</u> den allmänna lösningen till den inhomogena differentialekvationen $\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$.

b. Antag att y_1 är en lösning till differentialekvationen $y'' - h(x)y = 0$ där $h(x)$ är kontinuerlig på ett intervall (a,b) ($y_1(x) \neq 0$ på intervallet). Visa att $y_2(x) = y_1(x)\int \frac{dx}{(y_1(x))^2}$ är en annan lösning.

Visa vidare att y_1 och y_2 är linjärt oberoende.

c. $y = \frac{1}{x}$ är en lösning till differentialekvationen $y'' - \frac{2}{x^2} y = 0$. Bestäm den allmänna lösningen.

<u>Lösning:</u>

a. Vi ansätter $y(x) = z(x)y_1(x)$.

Då ger den inhomogena differentialekvationen $z'(x)y_1(x) + z(x)y_1'(x) + P(x)z(x)y_1(x) = f(x)$.

Omformning och utnyttjandet av att y_1 är en lösning till den homogena differentialekvationen ger

$$z'(x)y_1(x) + z(x)\left(y_1'(x) + P(x)y_1(x)\right) = f(x)$$
$$z'(x)y_1(x) = f(x)$$
$$z'(x) = \frac{f(x)}{y_1(x)}$$

Integrera med avseende på x: $z(x) = \int \frac{f(x)}{y_1(x)}dx + C_1$ där C_1 är en godtycklig konstant.

Den allmänna lösningen är $y(x) = z(x)y_1(x) = C_1 y_1(x) + y_1(x)\int \frac{f(x)}{y_1(x)} dx$.

b. Vi ansätter $y(x) = z(x)y_1(x)$. Insättning i $y'' - h(x)y = 0$ ger $z''y_1 + 2z'y_1' + zy_1'' - hzy_1 = 0$.

y_1 är en lösning till $y'' - h(x)y = 0$ ger $z''y_1 + 2z'y_1' = 0$. Reducera ordningen.

Sätt $u(x) = z'(x)$ vilket ger $u'y_1 + 2y_1'u = 0$.

Omformning och integration ger $\frac{u'}{u} = -\frac{2y_1'}{y_1}$, $\ln|u| = -2\ln|y_1| + \ln|C_1|$, $u = \pm C_1 \frac{1}{y_1^2} = \frac{C_2}{y_1^2}$.

$z'(x) = \frac{C_2}{(y_1(x))^2}$ vilket integreras med avseende på x: $z(x) = C_2\int \frac{dx}{(y_1(x))^2} + C_3$.

Då erhålles den allmänna lösningen $y(x) = z(x)y_1(x) = C_3 y_1(x) + C_2 y_1(x)\int \frac{dx}{(y_1(x))^2}$.

Lösningen består av en linjärkombination av två lösningar $y_1(x)$ och $y_2(x) = y_1(x)\int \frac{dx}{(y_1(x))^2}$.

Vi ser att $y_2(x) \neq Ay_1(x)$ där A är en konstant. $y_1(x)$ och $y_2(x)$ är linjärt oberoende.

c. En av $y = \frac{1}{x}$ linjärt oberoende lösning är $y_2(x) = \frac{1}{x}\int \frac{dx}{(\frac{1}{x})^2} = \frac{x^2}{3}$.

Den allmänna lösningen ges av $y(x) = c_1 \frac{1}{x} + c_2 x^2$.

SVAR: a. Den allmänna lösningen är $y(x) = C_1 y_1(x) + y_1(x)\int \frac{f(x)}{y_1(x)}dx$.

b. Se ovan. c. Den allmänna lösningen ges av $y(x) = c_1 \frac{1}{x} + c_2 x^2$.

14. En sträng är inspänd på x-axeln så att den har sina ändar i $x = 0$ och $x = 1$.

Vid tiden $t = 0$ befinner den sig i vila men utsätts för ett slag med en stämgaffel.

Detta ger strängen en begynnelsehastighet given av $g(x) = \begin{cases} V & , \frac{3}{8} < x < \frac{5}{8} \\ 0 & , \text{för övrigt} \end{cases}$.

Bestäm förflyttningen $u(x,t)$ då vågekvationen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ satisfieras.

<u>Lösning</u>:

Variabelseparationsansatsen $u(x,t) = X(x)T(t)$ ger $X''T = XT''$.

Utför division med XT och då erhålles $\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = \text{konstant} = \lambda$.

Den partiella differentialekvationen övergår i ett system av ordinära differentialekvationer.

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ T'' - \lambda T = 0 \end{cases}$$

Randvillkoren $u(0,t) = u(1,t) = 0$ övergår i $X(0) = X(1) = 0$.

Icke-triviala lösningar som uppfyller differentialekvationen och randvillkoren erhålles för

$\lambda < 0,\ \lambda = -\mu^2,\ \mu \in R$ och dessa lösningar har formen $X(x) = A\cos \mu x + B\sin \mu x$.

Randvillkoren ger $A = 0,\ \mu = n\pi$. Vi får $X(x) = B_n \sin n\pi x$.

Motsvarande lösningar till "T-ekvationen" är $T(t) = C_n \cos n\pi t + D_n \sin n\pi t$.

Begynnelsevillkoret $u(x,0) = 0$ övergår i $T(0) = 0$.

Detta villkor ger $C_n = 0$ och vi får $T(t) = D_n \sin n\pi t$.

Funktioner som uppfyller differentialekvationen, randvillkoren och begynnelsevillkoret $u(x,0) = 0$ är på formen $u_n(x,t) = b_n \sin n\pi x \sin n\pi t$. Linjärkombinationer av sådana lösningar är också lösningar.

Vi får $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x \sin n\pi t$. Nu återstår endast att bestämma koefficienterna.

Dessa får med hjälp av villkoret $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) = \begin{cases} V & , \frac{3}{8} < x < \frac{5}{8} \\ 0 & , \text{för övrigt} \end{cases}$.

Hastigheten är $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n\pi \sin n\pi x \cos n\pi t$ vilket ger $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n\pi \sin n\pi x$.

Koefficienterna är fourierkoefficienterna vid utveckling av $g(x)$ i en sinusserie.

Vi erhåller $b_n n\pi = \frac{2}{1}\int_0^1 g(x)\sin n\pi x\,dx = 2\int_{3/8}^{5/8} V\sin n\pi x\,dx = \frac{2V}{n\pi}(\cos\frac{3n\pi}{8} - \cos\frac{5n\pi}{8})$.

Koefficienterna blir $b_n = \frac{2V}{(n\pi)^2}(\cos\frac{3n\pi}{8} - \cos\frac{5n\pi}{8})$.

Förflyttningen är $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x \sin n\pi t$ där $b_n = \frac{2V}{(n\pi)^2}(\cos\frac{3n\pi}{8} - \cos\frac{5n\pi}{8})$.

SVAR: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x \sin n\pi t$ där $b_n = \frac{2V}{(n\pi)^2}(\cos\frac{3n\pi}{8} - \cos\frac{5n\pi}{8})$.

15. Sjungandes sången "Vi gå över daggstänkta berg fallera…" kommer en grupp studenter fram till en bro. Gruppen marscherar taktfast över bron med försumbar inre dämpning.
Avvikelsen , i mm, $y(t)$ från jämviktsläget från brons mittpunkt antas för $t>0$ vara bestämd av ekvationen $y''+y=f(t)$, där $f(t)=\sum_{n=0}^{999}5\delta(t-n2\pi)$ är stötpåkänningen orsakad av marscherandet. $\delta(t)$ är som vanligt Diracs deltafunktion. t, tiden, mäts i sekunder.

a) Bestäm $y(t)$ för $t>0$ om $y(0)=y'(0)=0$.

b) Beräkna via svaret i a) $y(t)$ för $0<t<2\pi$, $2\pi<t<4\pi$, $4\pi<t<6\pi$.
Hur kan man förmoda att $y(t)$ ser ut för $(n-1)\,2\pi<t<n\,2\pi$?
Har man skäl att tro att bron rasar till slut ?

<u>Lösning</u>:

a) Vi laplacetransformerar ekvationen $s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+Y(s)=\sum_{n=0}^{999}5e^{-n2\pi s}$.

Vi får $Y(s)=\sum_{n=0}^{999}\frac{5e^{-n2\pi s}}{s^2+1}$.

Återtransformera $y(t)=\sum_{n=0}^{999}5\sin(t-n2\pi)U(t-n2\pi)=5\sin t\sum_{n=0}^{999}U(t-n2\pi)$.

b) För $0<t<2\pi$:ger endast $n=0$ bidrag: $y(t)=5\sin t\cdot 1=5\sin t$.
För $2\pi<t<4\pi$:ger endast $n=0$, 1 bidrag: $y(t)=5\sin t\,(1+1)=10\sin t$.
För $4\pi<t<6\pi$:ger endast $n=0$, 1, bidrag: $y(t)=5\sin t\,(1+1+1)=15\sin t$.
Det inses att för $(n-1)\,2\pi<t<n\,2\pi$ med $n<999$ blir $y(t)=5n\sin t$.
För $t>999\,2\pi$ fås $y(t)=5000\sin t$.
Detta innebär att den maximala amplituden för brons svängningar är 5 meter !
Bron har antagligen rasat dessförinnan.

SVAR: a) Avvikelsen ges av $y(t)=5\sin t\sum_{n=0}^{999}U(t-n2\pi)$.

b) I de aktuella delintervallen blir $y(t)$: $5\sin t$, $10\sin t$, $15\sin t$ respektive $5n\sin t$.
Bron har antagligen rasat.