Tentamensskrivning i Differentialekvationer I, SF1633(5B1206).

Tisdagen den 17 augusti 2010, kl 1400-1900.

Tillåtet hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Del 1 är avsedd för betyg E och omfattar 3 uppgifter. För betyg E krävs 3 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, A, B, C och D, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg A krävs förutom 3 godkända moduler även 15 poäng på del 2.
För betyg B krävs förutom 3 godkända moduler även 11 poäng på del 2.
För betyg C krävs förutom 3 godkända moduler även 7 poäng på del 2.
För betyg D krävs förutom 3 godkända moduler även 3 poäng på del 2.

De som har registrering på 5B1206 erhåller betyg enligt nedan.
Tentamen är tvådelad.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 3 uppgifter. För betyg 3 krävs 3 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, 4 och 5, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg 4 krävs förutom 3 godkända moduler även 8 poäng på del 2.
För betyg 5 krävs förutom 3 godkända moduler även 14 poäng på del 2.
Uppgifterna 11-15 ger 4 poäng vardera.
Examinator: Hans Tranberg.

<u>Del 1</u>

<u>Modul 1.</u>

Då en produkt tas ut ur en ugn har den temperaturen 700°C (Celsius). Den svalnar därefter med en avsvalningstakt som är proportionell mot skillnaden i temperatur mellan produkten själv och det omgivande rummet. En konsult har hyrts in för att utreda denna avsvalningsprocess.
Konsulten föreslår två olika matematiska modeller.
Låt $T(t)$ vara produktens temperatur vid tiden t.
Modell1: $\dfrac{dT}{dt} = -\dfrac{T-40}{3}$. Modell 2: $\dfrac{dT}{dt} = \dfrac{T-30}{3}$.
Avgör vilken modell som kan vara lämplig och bestäm dess lösning.
Vad är produktens temperatur efter lång tid ?

<u>Modul 2.</u>

Låt $y = x^a,\ a \quad R$ vara en lösning till differentialekvationen $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$.
Bestäm två linjärt oberoende lösningar till differentialekvationen. Låt vidare $y_p = x^3$ vara en partikulärlösning till den inhomogena differentialekvationen $x^2y'' + 4xy' + 2y = f(x)$. Bestäm $f(x)$.
Ange slutligen den allmänna lösningen till den inhomogena differentialekvationen.

<u>Modul 3.</u>

Bestäm koefficienterna a_n , $n = 0,\ 1,\ 2,\ ..$ då $\sin^2 x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$.

vgv

Del 2

11. Differentialekvationen $xy' - y = x^2,\ x > 0$ har en lösning som också satisfierar differentialekvationen $x^3y' - x^2y = y^2,\ x > 0$. Bestäm denna lösning.
Bestäm den lösning som uppfyller $x^3y' - x^2y = y^2,\ x > 0$ och villkoret $y(1) = 2$.
Ange även lösningens existensintervall.

12.a) Låt $\mathbf{A}$ vara en reell matris.
Betrakta det homogena systemet av linjära differentialekvationer $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$.
En lösning till detta system ges av $\mathbf{Z} = \mathbf{X}_1 + i\ \mathbf{X}_2$, där $\mathbf{X}_1$ och $\mathbf{X}_2$ är reell- och vektorvärda funktioner.
Visa att även $\mathbf{X}_1$ och $\mathbf{X}_2$ uppfyller systemet.

b) Bestäm allmänna lösningen till systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{X}$.

c) Vad händer efter lång tid med en partikel som placeras i punkten (3,4)?

13.a) Låt y_1 vara en icke-trivial lösning till den homogena differentialekvationen $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = 0$.
Härled den allmänna lösningen till den inhomogena differentialekvationen $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$.

b) Antag att y_1 är en lösning till differentialekvationen $y'' - h(x)y = 0$ där $h(x)$ är kontinuerlig på ett intervall (a,b) ($y_1(x) \neq 0$ på intervallet). Visa att $y_2(x) = y_1(x)\displaystyle\int \frac{dx}{(y_1(x))^2}$ är en annan lösning.
Visa vidare att y_1 och y_2 är linjärt oberoende.

c) $y = \dfrac{1}{x}$ är en lösning till differentialekvationen $y'' - \dfrac{2}{x^2}y = 0$. Bestäm den allmänna lösningen.

14. En sträng är inspänd på x-axeln så att den har sina ändar i $x = 0$ och $x = 1$.
Vid tiden $t = 0$ befinner den sig i vila men utsätts för ett slag med en stämgaffel.
Detta ger strängen en begynnelsehastighet given av $g(x) = \begin{cases} V, & \frac{3}{8} < x < \frac{5}{8} \\ 0, & \text{för övrigt} \end{cases}$.
Bestäm förflyttningen $u(x,t)$ då vågekvationen $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ satisfieras.

15. Sjungandes sången "Vi gå över daggstänkta berg fallera…" kommer en grupp studenter fram till en bro.
Gruppen marscherar taktfast över bron med försumbar inre dämpning.
Avvikelsen , i mm, $y(t)$ från jämviktsläget från brons mittpunkt antas för $t > 0$ vara bestämd av ekvationen
$y'' + y = f(t)$, där $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{999} 5\delta(t - n2\pi)$ är stötpåkänningen orsakad av marscherandet. $\delta(t)$ är som vanligt Diracs deltafunktion. t, tiden, mäts i sekunder.

a) Bestäm $y(t)$ för $t > 0$ om $y(0) = y'(0) = 0$.

b) Beräkna via svaret i a) $y(t)$ för $0 < t < 2\pi,\quad 2\pi < t < 4\pi,\quad 4\pi < t < 6\pi$.
Hur kan man förmoda att $y(t)$ ser ut för $(n-1)\,2\pi < t < n\,2\pi$?
Har man skäl att tro att bron rasar till slut ?