Kompletteringstentamen i Differentialekvationer I, SF1633(5B1206).

Torsdagen den 9 september 2010, kl 1730-1830.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.

Svaren skall ges på reell form.

Modul 2.

Bestäm allmänna lösningen till systemet $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 15y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$ och bestäm därefter den lösning som uppfyller villkoret $\begin{cases} x(0) = -1 \\ y(0) = 3 \end{cases}$. Är systemets kritiska punkt stabil eller instabil ?

Lösning.

I kritiska punkter är tangentvektorn lika med nollvektorn.

Vi får att den kritiska punkten är origo.

Vi bestämmer matrisens egenvärden.

$$0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 15 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda - 7 = (\lambda+1)(\lambda-7).$$

Egenvärdena är reella och med olika tecken och de är $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 7$.

Systemets kritiska punkt, origo, är en sadelpunkt och därmed instabil.

För att bestämma den allmänna lösningen till systemet behövs egenvärden och tillhörande egenvektorer. Egenvektorerna erhålles ur systemet $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$, där $\mathbf{A}$ är systemets matris.

Det återstår att bestämma egenvektorerna.

Insättning av $\lambda_1 = -1$ i $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ger $\begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ och en lösning är $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Insättning av $\lambda_2 = 7$ i $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ger $\begin{pmatrix} -3 & 15 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ och en lösning är $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Den allmänna lösningen är $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{7t}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bestäm konstanterna. Villkoret ger oss $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Den lösning som uppfyller villkoret är $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2e^{-t}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{7t}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

SVAR: Den allmänna lösningen är $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{7t}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Den lösning som uppfyller villkoret är $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2e^{-t}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{7t}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Systemets kritiska punkt, origo, är en sadelpunkt och därmed instabil.

Modul 3.

Bestäm $y(4)$ då $y(t)$ satisfierar ekvationen $y' = 2U(t-3) + \int_0^t y(\tau)d\tau$, $t \geq 0$ och $y(0) = 0$.

$U(t)$ är Heavisides stegfunktiion.

Lösning:

Laplacetransformera ekvationen.

$$sY(s) - y(0) = 2\frac{e^{-3s}}{s} + \frac{1}{s}Y(s)$$

Insättning av villkoret och hyfsning ger:

$$(s^2 - 1)Y(s) = 2e^{-3s}$$

$$Y(s) = \frac{2}{s^2 - 1}e^{-3s}$$

Partialbråksuppdela den rationella funktionen.

$$\frac{2}{s^2 - 1} = \frac{-1}{s+1} + \frac{1}{s-1}$$

vilket erhållit med hjälp av handpåläggning.

Återtransformering ger $y(t) = U(t-3)\left\{-e^{-(t-3)} + e^{t-3}\right\}$.

Det återstår att bestämma det sökta funktionsvärdet.

Vi får $y(4) = U(4-3)\left\{-e^{-(4-3)} + e^{4-3}\right\} = e - e^{-1}$.

Detta kan även skrivas $y(4) = 2\sinh 1 = \dfrac{e^2 - 1}{e}$.

SVAR: Det sökta funktionsvärdet är $y(4) = 2\sinh 1 = \dfrac{e^2 - 1}{e}$.