Lösningsförslag till tentamensskrivning i Differentialekvationer I, SF1633(5B1206).

Onsdagen den 20 oktober 2010, kl 0800-1300.

Tillåtet hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Del 1 är avsedd för betyg E och omfattar 3 uppgifter. För betyg E krävs 3 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, A, B, C och D, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg A krävs förutom 3 godkända moduler även 15 poäng på del 2.
För betyg B krävs förutom 3 godkända moduler även 11 poäng på del 2.
För betyg C krävs förutom 3 godkända moduler även 7 poäng på del 2.
För betyg D krävs förutom 3 godkända moduler även 3 poäng på del 2.

De som har registrering på 5B1206 erhåller betyg enligt nedan.
Tentamen är tvådelad.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 3 uppgifter. För betyg 3 krävs 3 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, 4 och 5, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg 5 krävs förutom 3 godkända moduler även 14 poäng på del 2.
För betyg 4 krävs förutom 3 godkända moduler även 8 poäng på del 2.

Uppgifterna 11, 12 och 15 ger 4 poäng vardera.
Uppgift 13 ger 3 poäng. Uppgift 14 ger 5 poäng.

Examinator: Hans Tranberg.

Del 1

Modul 1.

I en tank finns ett stort antal molekyler. Om två av dessa krockar bildar dessa en ny molekyl och därför minskar antalet molekyler hela tiden med en hastighet som är proportionell mot kvadraten på antalet molekyler. Vi gör två mätningar med 10 sekunders mellanrum och märker att vid den andra mätningen finns hälften så många molekyler som vid den första mätningen. Efter hur lång tid finns det en fjärdedel av det ursprungliga antalet molekyler kvar som fanns vid den första mätningen ?

Lösning:

Låt antalet molekyler vid tiden t ges av $M(t)$.

Antalet molekyler minskar hela tiden med en hastighet som är proportionell mot kvadraten på antalet molekyler. Detta ger oss differentialekvationen $\frac{dM(t)}{dt} = \quad k(M(t))^2$, där proportionalitetskonstanten k är större än noll. Differentialekvationen är separabel.

Omformning ger $\frac{1}{(M(t))^2}\frac{dM(t)}{dt} = k$. Integrera med avseende på t .

Då erhålles $\frac{1}{M(t)} = kt + C$.

Vi ställer upp villkoren. $t = 0 \quad M = M_0, \quad t = 10 \quad M = \frac{M_0}{2}, \quad t = t_x \quad M = \frac{M_0}{4}$.

Det återstår att bestämma t_x.

Insättning ger $\dfrac{1}{M_0} = C$, $\dfrac{2}{M_o} = 10k + C$ och $\dfrac{4}{M_o} = kt_x + C$.

$\dfrac{2}{M_o} \quad \dfrac{1}{M_o} = 10k$ vilket ger $k = \dfrac{1}{10M_o}$.

Insättning i $\dfrac{4}{M_o} = kt_x + C$ ger $\dfrac{4}{M_o} = \dfrac{1}{10M_o}t_x + \dfrac{1}{M_o}$ vilket ger $t_x = 30$.

SVAR: Den sökta tiden är $t_x = 30$ sekunder.

<u>Modul 2.</u>

En partikels läge bestäms av systemet $\mathbf{X} \ = \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \ \mathbf{X}$. Bestäm systemets allmänna lösning.

Vart tar partikeln vägen då t växer obegränsat om partikelns läge uppfyller $\mathbf{X}(0) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$?

<u>Lösning:</u>

Vi bestämmer matrisens egenvärden och tillhörande egenvektor.

Egenvärdena erhålles ur ekvationen $0 = \begin{vmatrix} 1 & & 1 \\ & 1 \quad 1 & \end{vmatrix} = (1 \qquad)^2 + 1$.

Egenvärdena är komplexa och $\quad = 1 \pm i$. Realdelen av egenvärdet är större än noll.
Detta medför att partikeln försvinner utåt.
Vi bestämmer egenvektorn till ett av de komplexa egenvärdena.

Tag $\quad = 1 + i$. Insättning i det homogena systemet $\begin{matrix} 1 & & 1 \\ & 1 \quad 1 & \end{matrix} \quad \mathbf{K} = \mathbf{0}$

ger $\begin{matrix} i & 1 \\ 1 & i \end{matrix} \ \mathbf{K} = \mathbf{0}$. En lösning är $\mathbf{K} = \begin{matrix} i \\ 1 \end{matrix}$.

En komplex lösning är $\mathbf{Z} = \begin{matrix} i \\ 1 \end{matrix} \ e^{(1+i)t}$. Två linjärt oberoende lösningar är real- och imaginärdelen av den komplexa lösningen.

Vi skriver först om den komplexa lösningen. $\mathbf{Z} = e^t \ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} + i \ \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} + (\cos t + i \sin t)$.

$$\mathbf{X}_1 = \operatorname{Re}\mathbf{Z} = e^t \ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \ \cos t \ \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \ \sin t \ = e^t \ \begin{matrix} \sin t \\ \cos t \end{matrix}$$

$$\mathbf{X}_2 = \operatorname{Im}\mathbf{Z} = e^t \ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \ \sin t + \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \ \cos t + = e^t \ \begin{matrix} \cos t \\ \sin t \end{matrix}$$

Den allmänna lösningen ges av

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 = c_1 e^t \ \begin{matrix} \sin t \\ \cos t \end{matrix} + c_2 e^t \ \begin{matrix} \cos t \\ \sin t \end{matrix}$$

SVAR: Partikeln försvinner utåt.

Den allmänna lösningen ges av $\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 = c_1 e^t \ \begin{matrix} \sin t \\ \cos t \end{matrix} + c_2 e^t \ \begin{matrix} \cos t \\ \sin t \end{matrix}$

Modul 3

För funktionen f gäller : $f(t+2\pi)=f(t)$ och $f(t)=t^2, \; -\pi<t<\pi$.

Ange dess fourierserie och bestäm utgående från den summorna $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ och $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

Lösning:

Enligt BETA 13.1.13. har $f(t)=t^2$, $-\pi<t<\pi$, $f(t+2\pi)=f(t)$ fourierserien :

$$\frac{\pi^2}{3}+\frac{4\pi^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi t}{\pi}=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}\cos nt.$$

f tilldelas fourierserien: $f(t)\sim\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}\cos nt$.

(OBS! cosinusserie pga jämn funktion.)

För beräkning av de sökta seriernas summa insättes lämpliga värden.

Vi väljer $t=0$ respektive $t=\pi$. f är kontinuerlig och f' är styckvis kontinuerlig.

Fourierserien konvergerar mot funktionsvärde i dessa punkter.

För $t=0$ erhålles: $0=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}$.

För $t=\pi$ erhålles: $\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

SVAR: f tilldelas fourierserien: $f(t)\sim\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}\cos nt$.

De sökta seriesummorna är: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}$ respektive $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Anm.

Fourierkoefficienterna kan beräknas enligt följande:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}t^2dt=\frac{2}{\pi}\frac{\pi^3}{3}=\frac{2\pi^2}{3} \quad \text{och} \quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}t^2\cos nt\,dt=\{\text{partiell integration}\}=...=\frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

Del 2

11. Bestäm en kontinuerlig lösning till begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{dy}{dx}+2xy=f(x),\; f(x)=\begin{cases}x\;, & 0\le x<1\\ 0\;, & x\ge 1\end{cases},\; y(0)=2.$$

Lösning:

Den givna differentialekvationen är linjär av första ordningen.

Multiplicera ekvationen med en integrerande faktor. En sådan integrerande faktor är $e^{\int 2x\,dx}=e^{x^2}$.

Vi erhåller då $e^{x^2}\frac{dy}{dx}+e^{x^2}2xy=\begin{cases}e^{x^2}x\;, & 0\le x<1\\ 0\;, & x\ge 1\end{cases}$.

Vänstra ledet kan nu skrivas en derivata: $\frac{d}{dx}\left\{e^{x^2}y\right\}=\begin{cases}e^{x^2}x\;, & 0\le x<1\\ 0\;, & x\ge 1\end{cases}$.

Integrera med avseende på x : $e^{x^2}y=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x^2}+C_1\;, & 0\le x<1\\ C_2\;, & x\ge 1\end{cases}$.

Utnyttja först det givna begynnelsevillkoret $y(0) = 2$. Detta ger $2 = \frac{1}{2} + C_1$, $C_1 = \frac{3}{2}$.

Insatt ovan ger $y = \begin{matrix} \frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{\ \ x^2} & , 0 \quad x < 1 \\ C_2 e^{\ x^2} & , x \quad 1 \end{matrix}$.

Det återstår att bestämma den andra konstanten.
Den sökta lösningen skall vara kontinuerlig.
Då skall höger- och vänstergränsvärdet för lösningen i $x = 1$ vara lika.
Detta ger oss $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{\ \ 1} = C_2 e^{\ \ 1}$, $C_2 = \frac{e+3}{2}$.

SVAR: En kontinuerlig lösning till begynnelsevärdesproblemet är $y = \begin{matrix} \frac{1+3e^{\ \ x^2}}{2} , & 0 \quad x < 1 \\ \frac{e+3}{2}e^{\ \ x^2} , & x \quad 1 \end{matrix}$.

12. Bestäm och klassificera de kritiska punkterna till systemet: $\begin{matrix} x \ = \ 3x + y^2 + 2 \\ y \ = x^2 \quad y^2 \end{matrix}$.

<u>Lösning:</u>
Bestäm först de kritiska punkterna. I de kritiska punkterna är tangentvektorn lika med nollvektorn.

Tangentvektorn $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = \begin{matrix} 3x + y^2 + 2 \\ x^2 \quad y^2 \end{matrix}$.

Vi erhåller följande icke-linjära ekvationssystem:

$$\begin{matrix} 3x + y^2 + 2 \\ x^2 \quad y^2 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} , \quad \begin{matrix} x^2 \quad 3x + 2 = 0 \\ y = \pm x \end{matrix} , \quad \begin{matrix} (x \quad 1)(x \quad 2) = 0 \\ y = \pm x \end{matrix} .$$

De kritiska punkterna är: $(1,1)$, $(1, \quad 1)$, $(2,2)$ och $(2, \quad 2)$.
För att klassificera de kritiska punkterna studeras dessa lokalt. Vi kan då antingen införa ett nytt koordinatsystem med origo i den kritiska punkten och ta med den linjära delen av systemet eller direkt bestämma Jacobimatrisen i den kritiska punkten. Vi väljer det senare.

Tangentvektorn $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = \begin{matrix} 3x + y^2 + 2 \\ x^2 \quad y^2 \end{matrix} = g(\mathbf{X})$ ger oss Jacobimatrisen $g\ (\mathbf{X}) = \begin{matrix} 3 & 2y \\ 2x & 2y \end{matrix}$.

Insättning av respektive punkt ger oss en matris, vars egenvärden avgör typ och stabilitet.
Egenvärdena bestämmes ur ekvationen $0 = \det(\mathbf{A} \quad \mathbf{I})$, där $\mathbf{A}$ är Jacobimatrisen i punkten.

a) Punkten $(1,1)$ ger $\mathbf{g}\ (1,1) = \begin{matrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{matrix}$ och

$$0 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = \ ^2 + 5 \quad + 2 = (\quad + \frac{5}{2})^2 \quad \frac{17}{4} \text{ med egenvärdena } \quad = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2} .$$

Skilda reella egenvärden som är negativa innebär att den kritiska punkten är en stabil nod.

b) Punkten $(1, \quad 1)$ ger $\mathbf{g}\ (1, \quad 1) = \begin{matrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{matrix}$ och

$$0 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = \ ^2 + \quad 2 = (\quad 1)(\quad + 2) .$$

Skilda reella egenvärden med olika tecken innebär att den kritiska punkten är en sadelpunkt och därmed instabil.

c) Punkten $(2,2)$ ger $\mathbf{g}\ (2,2) = \begin{matrix} 3 & 4 \\ 4 & 4 \end{matrix}$ och

$$0 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = {}^2 + 7 \quad 4 = (\quad + \frac{7}{2})^2 \quad \frac{65}{4} \text{ med egenvärdena } = \frac{7 \pm \sqrt{65}}{2}.$$

Skilda reella egenvärden med olika tecken innebär att den kritiska punkten är en sadelpunkt och därmed instabil.

d) Punkten $(2,\ \ 2)$ ger $\mathbf{g}\ (2,\ \ 2) = \begin{matrix} 3 & 4 \\ 4 & 4 \end{matrix}$ och

$$0 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = {}^2 \quad + 4 = (\quad \frac{1}{2})^2 + \frac{15}{4} \text{ med egenvärdena } = \frac{1 \pm i\sqrt{15}}{2}.$$

Komplexa egenvärdena med positiv realdel innebär att den kritiska punkten är en instabil spiralpunkt.

Ovanstående gäller även för det icke-linjära systemet.

SVAR: $(1,1)$ är en stabil nod.

$(\ \ 1,\ \ 1)$ och $(2,2)$ är sadelpunkter och därmed instabila.

$(2,\ \ 2)$ är en instabil spiralpunkt.

13. Två linjärt oberoende lösningar till den homogena differentialekvationen $x^2 y \ + axy \ + by = 0$ ges av $y_1 = x$ och $y_2 = x^2$. Vidare finns det en motsvarande inhomogen differentialekvation med partikulärlösningen $y_p = x \ln x$. Bestäm den inhomogena differentialekvationen.

<u>Lösning:</u>

Insättning av lösningarna i differentialekvationen ger följande system:

$$\begin{matrix} y_1 = x & x^2 0 + ax1 + bx = 0 \\ y_2 = x^2 & x^2 2 + ax2x + bx^2 = 0 \end{matrix}.$$

$$\begin{matrix} a + b = 0 & b = 2 \\ 2 + 2a + b = 0 & a = \ \ 2 \end{matrix}.$$

Den homogena differentialekvationen är $x^2 y \quad 2xy \ + 2y = 0$.

En partikulärlösning är $y_p = x \ln x$ vilket insatt i vänstra ledet ovan ger den inhomogena differentialekvationens högerled.

Vi får $x^2 \frac{1}{x} \quad 2x(\ln x + x\frac{1}{x}) + 2x \ln x = \quad x$.

Vår sökta differentialekvation är $x^2 y \quad 2xy \ + 2y = \quad x$.

SVAR: Den sökta differentialekvationen är $x^2 y \quad 2xy \ + 2y = \quad x$.

14. a. Rita grafen till funktionen given av $f_a(t) = \frac{1}{2a} U(t_0 + a \quad t) U(t \quad (t_0 \quad a))$,

där $U(v) = \begin{matrix} 1, & v > 0 \\ 0, & v < 0 \end{matrix}.$

Bestäm därefter dess laplacetransform samt bestäm låt a gå mot noll i transformen. (2p)

b. Bestäm $y(\frac{3}{4})$ då $y(t)$ satisfierar differentialekvationen $y \ + 2y \ + 5y = 2 \ (t \quad \frac{}{2})$

samt uppfyller villkoren $y(0) = 1,\ y\ (0) = 0$. (3p)

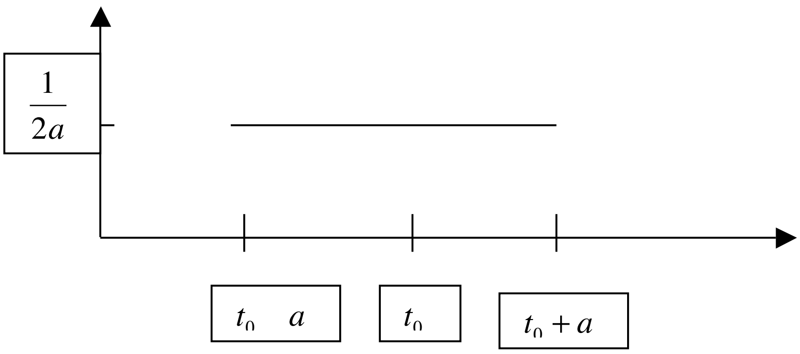
Lösning:

a. Vi analyserar först $f_a(t)=\frac{1}{2a}U(t_0+a-t)\cdot U(t-(t_0-a))$.

$$U(t_0+a-t)=\begin{cases}1, & t_0+a-t>0\\ 0, & t_0+a-t<0\end{cases}\Leftrightarrow U(t_0+a-t)=\begin{cases}1, & t_0+a>t\\ 0, & t_0+a<t\end{cases}$$

$$U(t-(t_0-a))=\begin{cases}1, & t-(t_0-a)>0\\ 0, & t-(t_0-a)<0\end{cases}\Leftrightarrow U(t-(t_0-a))=\begin{cases}1, & t>(t_0-a)\\ 0, & t<(t_0-a)\end{cases}$$

Detta ger oss att grafen får följande utseende.



Vi bestämmer funktionens laplacetransform och använder oss av dess definition.

$$L\{f_a(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f_a(t)dt=\int_{t_0-a}^{t_0+a}e^{-st}\frac{1}{2a}dt=\frac{1}{2as}(e^{-s(t_0-a)}-e^{-s(t_0+a)})$$

Vi hyfsar uttrycket $L\{f_a(t)\}=\frac{e^{-st_0}}{2as}(e^{as}-e^{-as})$.

Låt a gå mot noll i transformen. Vi Taylorutvecklar parentesen och får

$$L\{f_a(t)\}=\frac{e^{-st_0}}{2as}(e^{as}-e^{-as})=\frac{e^{-st_0}}{2as}(1+as-(1-as)+O(s^2))=e^{-st_0}(1+O(a))$$

$$\lim_{a\to 0}L\{f_a(t)\}=\lim_{a\to 0}e^{-st_0}(1+O(a))=e^{-st_0}$$

b.

Laplacetransformera differentialekvationen: $s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+2(sY(s)-y(0))+5Y(s)=2e^{-s\frac{\pi}{2}}$

$$Y(s)(s^2+2s+5)=2e^{-s\frac{\pi}{2}}+s+2\Leftrightarrow Y(s)=\frac{s+2}{s^2+2s+5}+\frac{2e^{-s\frac{\pi}{2}}}{s^2+2s+5}$$

$$Y(s)=\frac{s+1+\frac{1}{2}2}{(s+1)^2+4}+\frac{2}{(s+1)^2+4}e^{-s\frac{\pi}{2}}$$

Återtransformera

$$y(t)=e^{-t}(\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t)+U(t-\frac{\pi}{2})e^{-(t-\frac{\pi}{2})}\sin 2(t-\frac{\pi}{2}).$$

SVAR:

a.

$$L\{f_a(t)\} = \frac{e^{\quad st_0}}{2as}(e^{as} \quad e^{\quad as}) \text{ och } \lim_{a} L\{f_a(t)\} = e^{\quad st_0}$$

b.

Differentialekvationens lösning är

$$y(t) = e^{\quad t}(\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t) + U(t \quad \frac{}{2})e^{\quad (t \quad \frac{}{2})}\sin 2(t \quad \frac{}{2})$$

15. Bestäm alla lösningar på formen $u(r, \quad) = R(r) \quad (\quad)$ till differentialekvationen

$$\frac{{}^2u}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{u}{r} + \frac{1}{r^2}\frac{{}^2u}{{}^2} = 0$$

i de fall där ” r -ekvationen” har lösningar på formen Cr^p , p är en reell konstant.

Lösning:

Vi använder variabelseparationsmetoden. Sätt: $u(r, \quad) = R(r) \quad (\quad)$.

Insättning i differentialekvationen ger: $R \quad (r) \quad (\quad) + \frac{1}{r}R \quad (r) \quad (\quad) + \frac{1}{r^2}R(r) \quad (\quad) = 0$.

Multiplicera med $\frac{r^2}{R(r) \quad (\quad)}$: $\frac{r^2R \quad (r)}{R(r)} + \frac{rR \ (r)}{R(r)} + \frac{\quad (\quad)}{(\quad)} = 0$.

$$\frac{r^2R \quad (r)}{R(r)} + \frac{rR \ (r)}{R(r)} = \quad \frac{(\quad)}{(\quad)} = \text{konstant} = \quad .$$

Den partiella differentialekvationen övergår i ett system av ordinära differentialekvationer.

$r^2R \quad (r) + rR \ (r) \quad R(r) = 0$

$(\quad) + \quad (\quad) = 0$

Vi behandlar de tre fallen: $\quad > 0$, $\quad = 0$ resp $\quad < 0$.

$\quad > 0, \quad = \quad ^2, \quad R$

$r^2R \quad (r) + rR \ (r) \quad {}^2R(r) = 0$

$(\quad) + \ ^2 \quad (\quad) = 0$

Vi bestämmer först lösningar till "r-ekvationen". Sätt: $R(r) = r^p$.

Insättning ger: $r^2p(p \quad 1)r^{p \quad 2} + rpr^{p \quad 1} \quad {}^2r^p = 0$, $(p^2 \quad {}^2)r^p = 0$, $p = \pm \quad$.

Systemets lösningar blir: $R(r) = A_1r \quad + B_1r$; $(\quad) = C_1\cos \quad + D_1\sin$.

$u(r, \quad) = R(r) \quad (\quad) = (A_1r \quad + B_1r \quad)(C_1\cos \quad + D_1\sin \quad)$.

$\quad = 0$

$rR \quad (r) + R \ (r) = 0$

$(\quad) = 0$.

Vi löser "r-ekvationen": $(rR \ (r)) \ = 0$, $rR \ (r) = A$, $R \ (r) = \frac{A}{r}$, $R(r) = A\ln r + B$.

Den erhållna lösningen är ej på önskad form.

$\quad < 0, \quad = \quad ^2, \quad R$

$r^2 R\ \ (r) + rR\ (r) + \ \ ^2 R(r) = 0$

$(\ )\ \ \ ^2\ (\ ) = 0$

Vi bestämmer först lösningar till "r-ekvationen". Sätt: $R(r) = r^p$.
Insättning ger: $r^2 p(p\ \ 1)r^{p\ \ 2} + rpr^{p\ \ 1} + \ \ ^2 r^p = 0$, $(p^2 + \ \ ^2)r^p = 0$, $p = \pm i$.
Ger inget bidrag till lösningarna, ty p skall var reellt.
SVAR: De sökta lösningarna är på formen
□$u(r,\ ) = R(r)\ (\ ) = (A_1 r\ \ + B_1 r\ \ )(C_1 \cos\ \ + D_1 \sin\ \ )$.

Även linjärkombinationer av dessa lösningar är lösning till den givna differentialekvationen.