Kompletteringstentamen i Differentialekvationer I, SF1633(5B1206).
Måndagen den 15 november 2010, kl 1630-1730.
Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Examinator: Hans Tranberg

<u>Del 1</u>
<u>Modul 1.</u>
Lös begynnelsevärdesproblemet $(x+x^2)y' = y - y^2$, $y(1) = 2$. Ange därefter existensintervallet.
<u>Lösning</u>:
Den givna differentialekvationen är separabel.
Konstantlösningarna $y_1 = 0$ och $y_2 = 1$ saknar i detta fall intresse.
Då $y(1-y) \neq 0$ och $x(1+x) \neq 0$ får vi $\dfrac{y'}{y(1-y)} = \dfrac{1}{x(1+x)}$.
Partialbråksuppdela $(\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{1-y})y' = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{1+x}$.
Integrera med avseende på x $\ln|y| - \ln|1-y| = \ln|x| - \ln|1+x| + \ln|C_1|$.
Förenkla uttrycket: $\ln\left|\dfrac{y}{1-y}\right| = \ln\left|C_1\dfrac{x}{1+x}\right|$, $\dfrac{y}{1-y} = \pm C_1\dfrac{x}{1+x}$, $\dfrac{y}{1-y} = C\dfrac{x}{1+x}$.
Bestäm konstanten C. Villkoret $y(1) = 2$ ger $\dfrac{2}{-1} = C\dfrac{1}{2}$, $C = -4$.
Insättning i lösningen ger oss $\dfrac{1-y}{y} = \dfrac{1+x}{-4x}$, $\dfrac{1}{y} = 1 + \dfrac{1+x}{-4x}$, $y = \dfrac{4x}{3x-1}$.
I existensintervallet skall $3x - 1 \neq 0$ och innehålla $x = 1$.
Detta ger intervallet $\left\{x : x > \dfrac{1}{3}\right\}$.
SVAR: Begynnelsevärdesproblemets lösning är $y = \dfrac{4x}{3x-1}$ och dess existensintervall är $\left\{x : x > \dfrac{1}{3}\right\}$.

<u>Modul 2.</u>
Till en linjär andra ordningens differentialekvation är följande lösningar givna.
$y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$, $y_3 = xe^x + 2e^x$ och $y_4 = 4e^x$.
Bestäm den entydiga lösningen som uppfyller villkoren $y(0) = 3$ och $y'(0) = 5$
<u>Lösning</u>:
Till en linjär andra ordningens differentialekvation behövs två linjärt oberoende lösningar för att erhålla den allmänna lösningen. Vi har fyra lösningar till vårt förfogande.
Ett lämpligt val är $y_1 = e^x$ och $y_2 = xe^x$ vilka är linjärt oberoende.
Visa till exempel att Wronskideterminanten är skilt ifrån noll.

$$W(e^x, xe^x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & xe^x + e^x \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0$$

Den allmänna lösningen är $y = c_1 e^x + c_2 xe^x$.
Det återstår att bestämma konstanterna c_1 och c_2.
För detta behövs första derivatan. $y' = c_1 e^x + c_2(xe^x + e^x)$.

Våra villkor ger följande ekvationssystem: $\begin{cases} 3 = c_1 \\ 5 = c_1 + c_2 \end{cases}$ med lösningen $\begin{cases} c_1 = 3 \\ c_2 = 2 \end{cases}$.

SVAR: Den entydiga lösningen är $y = 3e^x + 2xe^x$.

Modul 3. Lösning:

Bestäm den lösning till den partiella differentialekvationen $\frac{\partial u}{\partial x} = 2\frac{\partial u}{\partial t} + u$ med villkoret $u(x,0) = 6e^{-3x}$ som är begränsad då $x > 0$ och $t > 0$.

Lösning:

Vi använder variabelseparation.

Sätt $u(x,t) = X(x)T(t)$.

$X'(x)T(t) = 2X(x)T'(t) + X(x)T(t)$

Division med $X(x)T(t)$ ger: $\frac{X'(x)}{X(x)} = \frac{2T'(t)}{T(t)} + 1$.

Vi inser att vänstra ledet är en konstant, λ, genom att derivera med avseende på x. Derivatan blir lika med noll.

Vi får då $\frac{X'(x)}{X(x)} = \frac{2T'(t)}{T(t)} + 1 = \lambda$, vilket kan skrivas $\begin{cases} X'(x) = \lambda X(x) \\ T'(t) = \frac{\lambda - 1}{2} T(t) \end{cases}$.

Detta system har lösningarna $\begin{cases} X(x) = Ae^{\lambda x} \\ T(t) = Be^{\frac{\lambda-1}{2}t} \end{cases}$ vilket ger $u(x,t) = Ae^{\lambda x}Be^{\frac{\lambda-1}{2}t} = Ce^{\lambda x + \frac{\lambda-1}{2}t}$.

Villkoret $u(x,0) = 6e^{-3x}$ ger $u(x,0) = 6e^{-3x} = Ce^{\lambda x}$ och vi får $C = 6$, $\lambda = -3$.

Insatt i lösning ger $u(x,t) = 6e^{-3x-2t}$ vilket är en begränsad lösning då $x > 0$ och $t > 0$.

SVAR: Den begränsade lösningen är $u(x,t) = 6e^{-3x-2t}$.