Tentamensskrivning i Differentialekvationer I, SF1633(5B1206).

Fredagen den 27 maj 2011, kl 0800-1300.

Tillåtet hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Del 1 är avsedd för betyg E och omfattar 3 uppgifter. För betyg E krävs 3 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, A, B, C och D, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg A krävs förutom 3 godkända moduler även 15 poäng på del 2.
För betyg B krävs förutom 3 godkända moduler även 11 poäng på del 2.
För betyg C krävs förutom 3 godkända moduler även 7 poäng på del 2.
För betyg D krävs förutom 3 godkända moduler även 3 poäng på del 2.

De som har registrering på 5B1206 erhåller betyg enligt nedan.
Tentamen är tvådelad.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 3 uppgifter. För betyg 3 krävs 3 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, 4 och 5, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg 4 krävs förutom 3 godkända moduler även 8 poäng på del 2.
För betyg 5 krävs förutom 3 godkända moduler även 14 poäng på del 2.
Uppgifterna 11-15 ger 4 poäng vardera.
Examinator: Hans Tranberg.

<u>Del 1</u>

<u>Modul 1.</u>

En termometer tas inifrån en bastu och ut, där temperaturen är -10°C.
Efter 1 minut avläses 30°C och efter 2 minuter avläses 10°C.
Vad är bastuns temperatur?
Ledning: Antag att Newtons avsvalningslag gäller, dvs att avsvalningshastigheten är proportionell mot temperaturdifferensen.

<u>Lösning:</u>

Låt $T(t)$ vara termometerns temperatur vid tiden t.
Vid tiden $t = 0$ sammanfaller termometerns temperatur med bastuns temperatur. Bestäm $T(0)$.
Enligt den givna ledningen gäller att $\dfrac{dT}{dt} = k(T \quad T_0)$, där k är en proportionalitetskonstant.
Den allmänna lösningen skrivs som summan av den allmänna homogena lösningen och en partikulärlösning.
Vi erhåller: $T(t) = Ae^{kt} + T_0 = \{T_0 = \quad 10\} = Ae^{kt} \quad 10$.
Bestäm konstanterna med hjälp av villkoren.

$$\begin{array}{lll} T(1) = 30 = Ae^{k} \quad 10 & Ae^{k} = 40 & e^{k} = \dfrac{1}{2} \quad k = \quad \ln 2 \\ T(2) = 10 = Ae^{2k} \quad 10 & Ae^{2k} = 20 & A = 40e^{\quad k} = 80 \end{array}$$

Termometern har temperaturen $T(t) = 80e^{\quad t\ln 2} \quad 10 = 80 \quad 2^{\quad t} \quad 10$.
Bastuns temperatur är $T(0) = 80 \quad 2^{\quad 0} \quad 10 = 70$.
SVAR: Bastuns temperatur är 70° C.

<u>Modul 2.</u>

Ett egenvärde till matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ är $_1 = 1 + 2i$. En tillhörande egenvektor är $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \quad i \end{pmatrix}$.

Bestäm den allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$.

Avgör vad som händer efter lång tid med en partikel som placeras i punkten $(2,3)$,
då partikelns rörelse styrs av ovanstående system.

<u>Lösning:</u>
Realdelen av $_1 = 1 + 2i$ ges av $\mathrm{Re}\ _1 = 1 > 0$ ger att partikeln avlägsnar sig obegränsat från startpunkten.

Vi har nu en komplex lösning till systemet. $\mathbf{Z} = e^{(1+2i)t} \begin{matrix} 1 \\ 1 \quad i \end{matrix} = e^t(\cos 2t + i \sin 2t) \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} + i \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} +.$

Genom att ta realdel respektive imaginärdel av den komplexa lösningen erhåller vi två reella linjärt oberoende lösningar till systemet.

$$\mathbf{X}_1 = e^t \begin{matrix} \cos 2t \\ \cos 2t + \sin 2t \end{matrix} \text{ och } \mathbf{X}_2 = e^t \begin{matrix} \sin 2t \\ \sin 2t \quad \cos 2t \end{matrix} .$$

Systemets allmänna lösning är $\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 = c_1 \begin{matrix} e^t \cos 2t \\ e^t(\cos 2t + \sin 2t) \end{matrix} + c_2 \begin{matrix} e^t \sin 2t \\ e^t(\sin 2t \quad \cos 2t) \end{matrix} .$

SVAR: Systemets allmänna lösning är $\mathbf{X} = c_1 \begin{matrix} e^t \cos 2t \\ e^t(\cos 2t + \sin 2t) \end{matrix} + c_2 \begin{matrix} e^t \sin 2t \\ e^t(\sin 2t \quad \cos 2t) \end{matrix} .$

Partikeln avlägsnar sig obegränsat från startpunkten.

<u>Modul 3.</u>
Bestäm den lösning till den partiella differentialekvationen

$$\frac{u}{x} \quad 10\frac{u}{y} = 40u$$

som uppfyller villkoret $u(x,0) = 35e^{\ 3x} + 17e^{4x}$.

<u>Lösning:</u>
Vi separerar variablerna: $u(x,y) = X(x)Y(y)$.
Insättning i den partiella differentialekvationen ger: $X\ (x)Y(y) \quad 10X(x)Y\ (y) = 40X(x)Y(y)$.

Dividera med $10X(x)Y(y)$: $\dfrac{X\ (x)}{10X(x)} \quad \dfrac{Y\ (y)}{Y(y)} = 4$, $\dfrac{X\ (x)}{10X(x)} = \dfrac{Y\ (y)}{Y(y)} + 4 = \text{konstant} = \quad .$

Vi erhåller ett system av linjära differentialekvationer: $\begin{matrix} X\ (x) \quad 10 \ \ X(x) = 0 \\ Y\ (y) \quad (\quad 4)Y(y) = 0 \end{matrix}.$

$$\begin{matrix} X(x) = Ae^{10\ x} \\ Y(y) = Be^{(\quad 4)y} \end{matrix} \qquad u(x,y) = Ae^{10\ x}Be^{(\quad 4)y} = ABe^{10\ x+(\quad 4)y}$$

Linjärkombinationer av lösningar är lösning.
Den lösning som uppfyller det givna villkoret är på formen:

$$u(x,y) = \quad c \quad e^{10\ x+(\ \forall 4)y}$$

Det återstår att bestämma koefficienterna.

Villkoret $u(x,0) = 35e^{\ 3x} + 17e^{4x}$ ger: $u(x,0) = 35e^{\ 3x} + 17e^{4x} = \ c_{\forall}\ e^{10\forall x}$ $\forall$

Identifiering ger: $u(x,y) = 35e^{\ 3x+(\ \frac{3}{10}\ \ 4)y} + 17e^{4x+(\frac{4}{10}\ \ 4)y}$

SVAR: Den sökta lösningen är $u(x,y) = 35e^{\ 3x\ \ \frac{43}{10}y} + 17e^{4x\ \ \frac{36}{10}y}$.

Del 2

11. Bestäm $y(\ )$ då

$$y \quad +9y = 18U(t \quad \frac{}{2})\cos 3t$$

och $y(0) = 7$ och $y \ (0) = 9$, $U(t)$ är Heavisides stegfunktion.

Lösning:

Högra ledet kan omformas

$$\cos 3t = \cos 3(u + \frac{}{2}) = \cos 3u \cos\frac{3}{2} \quad \sin 3u \sin\frac{3}{2} = \sin 3u = \sin 3(t \quad \frac{}{2})$$

Vi får

$$y \quad +9y = 18U(t \quad \frac{}{2})\sin 3(t \quad \frac{}{2})$$

Laplacetransformera differentialekvationen: $s^2Y(s) \quad sy(0) \quad y \ (0) + 9Y(s) = 18e^{\frac{}{2}s}\frac{3}{s^2+9}$.

Insättning av villkoren och hyfsning ger: $Y(s) = \dfrac{7s+9}{s^2+9} + \dfrac{54e^{\frac{}{2}s}}{(s^2+9)^2}$.

Återtransformering ger: $y(t) = 7\cos 3t + 3\sin 3t + U(t \quad \frac{}{2})(\sin 3(t \quad \frac{}{2}) \quad 3(t \quad \frac{}{2})\cos 3(t \quad \frac{}{2}))$.

Insättning av $t =$ ger $y(\ ) = \ 7 \ 1 = \ 8$.

SVAR: Det sökta funktionsvärdet är $y(\ ) = \ 7 \ 1 = \ 8$.

12. Ett stim något orkeslösa mörtar befinner sig i en sjö med icke-stillastående vatten.
Det strömmande vattnet beskrivs av systemet

$$\frac{dx}{dt} = y(2+x)$$

$$\frac{dy}{dt} = (x \quad y)(1 \quad x \quad y)$$

Bestäm vart mörtarna skall bege sig för att få lugn och ro. Detta är liktydigt med att man bestämmer systemets kritiska punkter samt undersöker vilka av dem som är åtminstone stabila.
De kritiska punkternas typ behöver ej anges.

Lösning:

I de kritiska punkterna är hastighetsvektorn lika med nollvektorn.
Vi får

$$0 = y(2+x)$$

$$0 = (x \quad y)(1 \quad x \quad y)$$

Detta system har följande lösningar: (0,0), (1,0), (-2,-2) och (-2,3).
För att undersöka de kritiska punkternas karaktär linjariserar vi med hjälp av Jacobimatrisen.
Insättning av respektive kritisk punkt i Jacobimatrisen och bestämning av matrisens egenvärden ger oss möjlighet att bestämma karaktären hos den kritiska punkten.

$$\mathbf{J}(x,y) = \begin{matrix} y & 2+x \\ 1 \quad x \quad y \quad x+y & 1+x+y \quad x+y \end{matrix} = \begin{matrix} y & 2+x \\ 1 \quad 2x & 2y \quad 1 \end{matrix}$$

(0,0) (1,0) (-2,-2) (-2,3)

$$\mathbf{J}(0,0) = \begin{matrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix} = \mathbf{A} \quad \mathbf{J}(1,0) = \begin{matrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{matrix} = \mathbf{B} \quad \mathbf{J}(\ 2, \ 2) = \begin{matrix} 2 & 0 \\ 5 & 5 \end{matrix} = \mathbf{C} \quad \mathbf{J}(\ 2, 3) = \begin{matrix} 3 & 0 \\ 5 & 5 \end{matrix} = \mathbf{D}$$

Egenvärdena erhålles ur ekvationen $0 = \det(\mathbf{A1} \quad \mathbf{I})$ där A1 är den aktuella matrisen.

(0,0)

$0 = \begin{vmatrix} & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = {}^2 + \quad 2 = (\quad 1)(\quad + 2)$

Egenvärdena har skilda tecken. Instabilt.

<u>(1,0)</u>

$0 = \begin{vmatrix} & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = {}^2 + \quad + 3 = (\quad + \frac{1}{2})^2 + \frac{11}{4}$

Egenvärdena är komplexa med negativ realdel. Stabilt.

<u>(-2,-2)</u>

Egenvärdena är -2 och -5. Stabilt.

<u>(-2,3)</u>

Egenvärdena är 3 och 5. Instabilt.

Mörtarna kan få lugn och ro i två punkter: (1,0) och (-2,-2)

SVAR: Mörtarna får lugn och ro i punkterna (1,0) och (-2,-2).

13. Visa att $\{1,\ e^t,\ e^{\ t}\}$ <u>kan</u> bilda en fundamentalmängd av lösningar till en homogen linjär differentialekvation med konstanta koefficienter.

Vidare är $y_p = te^t$ en partikulärlösning till motsvarande inhomogena differentialekvation.

Bestäm en sådan differentialekvation samt ange dess allmänna lösning.

<u>Lösning:</u>

Vi undersöker om de givna funktionerna är linjärt oberoende.

Bilda Wronskideterminanten $W(1,\ e^t,\ e^{\ t}) = \begin{vmatrix} 1 & e^t & e^{\ t} \\ 0 & e^t & e^{\ t} \\ 0 & e^t & e^{\ t} \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \quad 0$.

Den givna funktionsmängden kan vara en fundamentalmängd av lösningar till en homogen linjär differentialekvation med konstanta koefficienter. Vi bestämmer en sådan differentialekvation.

En homogen linjär differentialekvation med konstanta koefficienter av tredje ordningen kan skrivas som $(D \quad a)(D \quad b)(D \quad c)y = 0$ där konstanterna är rötter till den karaktäristiska ekvationen.

Dessa rötter är i vårt fall: 0, 1 och 1. Det innebär att differentialekvationen har formen

$D(D \quad 1)(D+1)y = 0$, $(D^3 \quad D)y$ eller $y \quad y = 0$.

Nu över till den inhomogena differentialekvationen.

Insättning av $y_p = te^t$ i $y \quad y$ ger högra ledet i den inhomogena differentialekvationen.

$y \quad y = \quad (e^t + te^t) + 3e^t + te^t = 2e^t$

Differentialekvationens allmänna lösning ges av allmänna homogena lösningen plus en partikulärlösning.

Den allmänna homogena lösningen är en linjärkombination av de fundamentala lösningarna.

Vi får $y = C_1 \quad 1 + C_2 \quad e^t + C_3 \quad e^{\ t} + te^t$.

<u>SVAR:</u> Den sökta differentialekvationen är $y \quad y = 2e^t$ och

dess allmänna lösning är $y = C_1 \quad 1 + C_2 \quad e^t + C_3 \quad e^{\ t} + te^t$.

14. a. Vad menas med att två funktioner är ortogonala på ett intervall $0 \quad x \quad L$?

b. Undersök om följden $\{1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \cos 3x, \ldots \cos nx, \ldots\ \}$ är ortogonal på intervallet $0 \quad x \quad$.

c. Vad menas med att en reellvärd funktion f är periodisk med perioden T ?

d. Bestäm koefficienterna a_n , $n = 0,1,2,3,\ldots.$ så att $\sin 2x = \ {}_{n=0} \ a_n \cos nx$ då $0 < x <$.

<u>Lösning:</u>

a. Två funktioner, f och g , är ortogonala på intervallet $[0, L]$ då ${}_0^L f(x)g(x)dx = 0$.

b. Vi undersöker om $\int_0^{\pi} \cos nx \cos mx dx = 0$ med $n \neq m$.

$$V.L. = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\cos(n-m)x + \cos(n+m)x)dx$$

$$V.L. = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n-m)}\sin(n-m)x + \frac{1}{(n+m)}\sin(n+m)x\right]_0^{\pi} = 0 = H.L.$$

För $n = 0, m \neq 0$ erhålles $\int_0^{\pi} 1\cos mx dx = \left[\frac{1}{m}\sin mx\right]_0^{\pi} = 0$

c. Den reellvärda funktionen f är periodisk med perioden T då $f(t+T) = f(t)$ för alla t .

d. Koefficienterna a_n , $n = 0,1,2,3,....$ är fourierkoefficienterna för den jämn funktion, som på intervallet $0 < x < \pi$ ges av $f(x) = \sin 2x$.

Koefficienterna ges av $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin 2x \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \{\sin(2x+nx) + \sin(2x-nx)\} dx$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \{\sin((n+2)x) + \sin((2-n)x)\} dx = \{n \neq 2\} = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(n+2)x}{n+2} - \frac{\cos(2-n)x}{2-n}\right]_0^{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-\cos(n+2)\pi}{n+2} + \frac{1-\cos(2-n)\pi}{2-n}\right) = \frac{1-\cos n\pi}{\pi}\left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{2-n}\right) = \frac{1-\cos n\pi}{\pi}\cdot\frac{4}{4-n^2}$$

$$a_n = \begin{cases} 0\text{, om } n \text{ är jämnt} \neq 2. \\ -\dfrac{8}{\pi(n^2-4)}\text{, om } n \text{ är udda.} \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin 2x\, dx = \frac{1}{\pi}\left[-\cos 2x\right]_0^{\pi} = 0$$

Vidare gäller $a_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \{\sin 4x\} dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos 4x}{4}\right]_0^{\pi} = 0$

Anmärkning: En annan lösningsvariant på uppgift d är att först multiplicera $\sin 2x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$ med $\cos mx$ och därefter integrera över intervallet $0 < x < \pi$ och utnyttja ortogonaliteten hos följden $\{1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \cos 3x, \dots \cos nx, \dots\}$.

SVAR: a. Se ovan. b. Funktionsföljden är ortogonal. c. Se ovan.
d. Koefficienterna

$$a_n = \begin{cases} 0\text{, om } n \text{ är jämnt.} \\ -\dfrac{8}{\pi(n^2-4)}\text{, om } n \text{ är udda.} \end{cases}$$

15. Om ingen fisk tas upp ur en sjö så varierar mängden fisk, $y(t)$ [ton], i sjön med tiden t [år] enligt differentialekvationen

$y' = \frac{y}{a}\left(1 - \frac{y}{b}\right)$, $y > 0$, där $a = 6$ [år] och $b = 60$ [ton].

Nu börjar man fiska ut c [ton] fiskar per år, (c är en positiv konstant).

a. Ange differentialekvationen för y som då gäller.

b. Ange det kritiska värde på c som inte får överskridas om det skall finnas någon jämviktslösning > 0.

c. Då c ligger under detta kritiska värde finns det en stabil jämviktsnivå $y_0 > 0$ för mängden fisk. Bestäm y_0 som funktion av c.

Lösning:

a. Den korrigerade differentialekvationen blir $y \; = \frac{y}{a} \; 1 \quad \frac{y}{b} \qquad c$.

Med de givna värdena på konstanterna får vi

$$y \; = \frac{y}{6} \; 1 \quad \frac{y}{60} \qquad c = \frac{y(60 \quad y)}{360} \quad c = \frac{y(60 \quad y) \quad 360c}{360} = f(y) \; .$$

b. Jämviktslösning erhålles då $f(y) = 0$.

Då är $y^2 \quad 60y + 360c = 0$, $(y \quad 30)^2 = 900 \quad 360c = 180(5 \quad 2c)$.

Reella lösningar och större än noll erhålles då $c \quad \frac{5}{2}$.

För $c > \frac{5}{2}$ existerar inga jämviktslösningar.

Jämviktslösningarna är $y = 30 \pm \sqrt{180(5 \quad 2c)}$.

c. Vi bestämmer den stabila jämviktslösningen y_0 genom att studera tecknet hos $f \;(y_0)$.

Jämviktslösningen är stabil om $f \;(y_0) < 0$ och instabil om $f \;(y_0) > 0$.

$f \;(y) = \frac{60 \quad 2y}{360} = \frac{30 \quad y}{180}$ och insättning av jämviktslösningarna ger

$f \;(30 + \sqrt{180(5 \quad c)}) = \frac{\sqrt{180(5 \quad 2c)}}{180} < 0$ stabil jämviktslösning.

$f \;(30 \quad \sqrt{180(5 \quad 2c)}) = \frac{\sqrt{180(5 \quad 2c)}}{180} > 0$ instabil jämviktslösning.

SVAR:

a. Den nya differentialekvationen är. $y \; = \frac{y(60 \quad y)}{360} \qquad c$

b. Det kritiska värde på c är $c = \frac{5}{2}$.

c. Den stabila jämviktsnivån $y_0 = 30 + \sqrt{180(5 \quad 2c)}$.