Tentamensskrivning i Differentialekvationer I, SF1633(5B1206).

Fredagen den 27 maj 2011, kl 0800-1300.

Tillåtet hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Del 1 är avsedd för betyg E och omfattar 3 uppgifter. För betyg E krävs 3 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, A, B, C och D, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg A krävs förutom 3 godkända moduler även 15 poäng på del 2.
För betyg B krävs förutom 3 godkända moduler även 11 poäng på del 2.
För betyg C krävs förutom 3 godkända moduler även 7 poäng på del 2.
För betyg D krävs förutom 3 godkända moduler även 3 poäng på del 2.

De som har registrering på 5B1206 erhåller betyg enligt nedan.
Tentamen är tvådelad.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 3 uppgifter. För betyg 3 krävs 3 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, 4 och 5, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg 4 krävs förutom 3 godkända moduler även 8 poäng på del 2.
För betyg 5 krävs förutom 3 godkända moduler även 14 poäng på del 2.
Uppgifterna 11-15 ger 4 poäng vardera.
Examinator: Hans Tranberg.

Del 1

Modul 1.
En termometer tas inifrån en bastu och ut, där temperaturen är -10°C.
Efter 1 minut avläses 30°C och efter 2 minuter avläses 10°C.
Vad är bastuns temperatur?
Ledning: Antag att Newtons avsvalningslag gäller, dvs att avsvalningshastigheten är proportionell mot temperaturdifferensen.

Modul 2.
Ett egenvärde till matrisen $\mathbf{A} = \begin{matrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{matrix}$ är $_1 = 1 + 2i$. En tillhörande egenvektor är $\mathbf{K}_1 = \begin{matrix} 1 \\ 1 \quad i \end{matrix}$.

Bestäm den allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer $\mathbf{X} = \begin{matrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{matrix} \mathbf{X}$.

Avgör vad som händer efter lång tid med en partikel som placeras i punkten $(2,3)$, då partikelns rörelse styrs av ovanstående system.

Modul 3.
Bestäm den lösning till den partiella differentialekvationen

$$\frac{u}{x} \quad 10\frac{u}{y} = 40u$$

som uppfyller villkoret $u(x,0) = 35e^{\;3x} + 17e^{4x}$.

vgv

Del 2

11. Bestäm $y(\quad)$ då

$$y \quad + 9y = 18U(t \quad \frac{}{2})\cos 3t$$

och $y(0) = 7$ och $y\ (0) = 9$, $U(t)$ är Heavisides stegfunktion.

12. Ett stim något orkeslösa mörtar befinner sig i en sjö med icke-stillastående vatten.
Det strömmande vattnet beskrivs av systemet

$$\frac{dx}{dt} = y(2 + x)$$

$$\frac{dy}{dt} = (x \quad y)(1 \quad x \quad y)$$

Bestäm vart mörtarna skall bege sig för att få lugn och ro. Detta är liktydigt med att man bestämmer systemets kritiska punkter samt undersöker vilka av dem som är åtminstone stabila.
De kritiska punkternas typ behöver ej anges.

13. Visa att $\left\{1,\ e^{t},\ e^{\ t}\right\}$ kan bilda en fundamentalmängd av lösningar till en homogen linjär differentialekvation med konstanta koefficienter.
Vidare är $y_p = te^{t}$ en partikulärlösning till motsvarande inhomogena differentialekvation.
Bestäm en sådan differentialekvation samt ange dess allmänna lösning.

14. a. Vad menas med att två funktioner är ortogonala på ett intervall $0 \quad x \quad L$?

b. Undersök om följden $\{1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \cos 3x, \ldots \cos nx, \ldots\ \}$ är ortogonal på intervallet $0 \quad x \quad$.

c. Vad menas med att en reellvärd funktion f är periodisk med perioden T ?

d. Bestäm koefficienterna a_n , $n = 0,1,2,3,\ldots.$ så att $\sin 2x = \quad\limits_{n=0} a_n \cos nx$ då $0 < x < \quad$.

15. Om ingen fisk tas upp ur en sjö så varierar mängden fisk, $y(t)$ [ton], i sjön med tiden t [år] enligt differentialekvationen

$$y \ = \frac{y}{a}\ 1 \quad \frac{y}{b} \quad , \ y > 0$$, där $a = 6$ [år] och $b = 60$ [ton].

Nu börjar man fiska ut c [ton] fiskar per år, (c är en positiv konstant).

a. Ange differentialekvationen för y som då gäller.

b. Ange det kritiska värde på c som inte får överskridas om det skall finnas någon jämviktslösning > 0.

c. Då c ligger under detta kritiska värde finns det en stabil jämviktsnivå $y_0 > 0$ för mängden fisk. Bestäm y_0 som funktion av c.