Kompletteringstentamen i Differentialekvationer I, SF1633(5B1206).

Måndagen den 13 juni 2011, kl 1030-1130.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

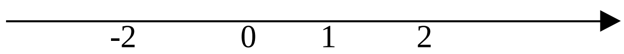
Modul 1.

Bestäm lösningen till begynnelsevärdesproblemet $xy' - 2y = 4y^2,\ \ x > 0 \ \ , y(1) = \frac{1}{6}$.

Ange även lösningens existensintervall.

Lösning.

Differentialekvationen är av Bernoulli typ (Den är även separabel.)
Omforma differentialekvationen $xy^{-2}y' - 2y^{-1} = 4$.
Sätt $z = y^{-1},\ z' = -y^{-2}y'$ och vi erhåller $-xz' - 2z = 4$.
Vi har erhållit en linjär differentialekvation av första ordningen.
Skriv om differentialekvationen och bestäm en integrerande faktor.
Omformning ger $z' + \frac{2}{x}z = -\frac{4}{x}$. En integrerande faktor är x^2.
Multiplicera differentialekvationen med x^2 och vi erhåller $x^2z' + 2xz = -4x$.
Observera att det nya vänstra ledet är en derivata. Vi får $(x^2z)' = -4x$.
Integrera med avseende på x: $x^2z = -2x^2 + C$.
Bestäm konstanten C. Begynnelsevillkoret ger $6 = -2 + C$, $C = 8$.
Insättning ger: $x^2z = -2x^2 + 8$, $z = \frac{2(4 - x^2)}{x^2}$ vilket ger $y = \frac{x^2}{2(4 - x^2)}$.
Vi har att $x^2 \neq 4 \ \ , x \neq \pm 2$. Nu över till lösningens existensintervall.
Det delintervall som innehåller $x = 1$ skall väljas.



Det aktuella existensintervallet är $\{x \ : \ 0 < x < 2\}$

SVAR: Begynnelsevärdesproblemets lösning är $y = \frac{x^2}{2(4 - x^2)}$
och dess existensintervall är $\{x \ : \ 0 < x < 2\}$.

Modul 2.

Låt $y = x^2$ vara en lösning till differentialekvationen $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0,\ \ x > 0$.
Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $x^2y'' - 4xy' + 6y = 2x^4,\ \ x > 0$.

Lösning.

Vi utnyttjar att vi har en känd lösning till den homogena differentialekvationen.
Vi använder reduktion av ordning för att erhålla en differentialekvation av ordning ett.
Ansätt $y = x^2z$ vilket ger $y' = x^2z' + 2xz$ och $y'' = x^2z'' + 4xz' + 2z$.
Insättning i den inhomogena differentialekvationen ger
$x^2(x^2z'' + 4xz' + 2z) - 4x(x^2z' + 2xz) + 6x^2z = 2x^4$
$z'' = 2$ vilket integreras två gånger med avseende på x.
$z = x^2 + Ax + B$, där A och B är godtyckliga konstanter.
Den sökta lösningen är $y = x^2(x^2 + Ax + B)$.
SVAR: Den allmänna lösningen är $y = x^4 + Ax^3 + Bx^2$
där A och B är godtyckliga konstanter.

Modul 3.

För funktionen f gäller att $f(t+2\pi)=f(t)$ för alla t.

Vidare gäller att $f(t)=\begin{cases}1 & ,-\pi<t<0\\ 5 & ,\quad 0\le t<\pi\end{cases}$.

Bestäm f:s fourierserie samt ange vad fourierserien konvergerar mot för $t=0$.

Lösning:

f tilldelas fourierserien $f(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nt+b_n\sin nt$, där

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}1dt+\int_{0}^{\pi}5dt\right)=6$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt dt=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\cos nt dt+\int_{0}^{\pi}5\cos nt dt\right)=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt dt=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\sin nt dt+\int_{0}^{\pi}5\sin nt dt\right)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left\{-\frac{\cos 0-\cos(-n\pi)}{n}-5\frac{\cos n\pi-\cos 0}{n}\right\}=\frac{4-4\cos n\pi}{n\pi}$$

Den sökta fourierserien är $f(t)\sim 3+\sum_{n=1}^{\infty}4\frac{1-\cos n\pi}{n\pi}\sin nt$.

Fourierserien konvergerar för $t=0$ mot medelvärdet $\frac{f(0+)+f(0-)}{2}$ vilket är 3.

SVAR: Den sökta fourierserien är $f(t)\sim 3+\sum_{n=1}^{\infty}4\frac{1-\cos n\pi}{n\pi}\sin nt$.

Fourierserien konvergerar för $t=0$ mot 3.