Lösningsförslag till tentamensskrivning i Differentialekvationer I, SF1633(5B1206).

Tisdagen den 16 augusti 2011, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Del 1

Modul 1.

En matematisk modell ges av $\frac{dP(t)}{dt} = P(t)(a+bP(t))-c$, där $a=5,\ b=-1$ och $c=4$.
Hur kan denna modell tolkas ?
Studera lösningskurvorna och bestäm vad som händer efter lång tid för alla startvärden $P(0)$.

Lösning:

Den matematiska modellen är en populationsmodell. $P(t)$ är antalet individer vid tiden t.
Födelsehastigheten är $aP(t)$ och dödshastigheten är $b\big(P(t)\big)^2$, där b är negativ.
c är antalet som per tidsenhet som flyttar ut.
Insättning av de givna konstanterna ger

$$\frac{dP(t)}{dt} = (5-P(t))P(t)-4 = 5P(t)-P^2(t)-4 = (P(t)-1)(4-P(t))$$

Här finns två stationära lösningar, $P(t)=1$ och $P(t)=4$.
För startpopulationer $P(0)$ i intervallet 0 till 1 är derivatan negativ och populationen dör ut.
För startpopulationen $P(0)$ lika med 1 är derivatan noll och populationen förblir lika med ett.
För startpopulationer $P(0)$ i intervallet 1 till 4 är derivatan positiv och populationen växande.
För startpopulationer $P(0)$ större än 4 är derivatan negativ och populationen avtagande.
Efter lång tid kommer populationen att dö ut om startpopulationen är mindre än 1.
Är startpopulationen större än 1 kommer den efter lång tid att gå mot 4.

För startpopulationer lika med de stationära lösningarna kommer populationerna att förbli konstant.

SVAR: Efter lång tid kommer populationen att dö ut om startpopulationen är mindre än 1.
Är startpopulationen större än 1 kommer den efter lång tid att gå mot 4.
För startpopulationer lika med de stationära lösningarna kommer populationerna att förbli konstant.

Modul 2.

Låt $y=x^3$ vara en lösning till differentialekvationen $x^2y''-xy'-3y=0$, $x>0$.
Bestäm den lösning till differentialekvationen $x^2y''-xy'-3y=4x^3$, $x>0$ som uppfyller villkoren $y(1)=0$ och $y'(1)=1$.

Lösning:

Vi reducerar ordningen hos den inhomogena differentialekvationen genom att utnyttja en lösning till den homogena differentialekvationen.
Sätt: $y=x^3z$, $y'=x^3z'+3x^2z$ och $y''=x^3z''+6x^2z'+6xz$.
Insättning i den inhomogena differentialekvationen
ger $x^2(x^3z''+6x^2z'+6xz)-x\,(x^3z'+3x^2z)-3x^3z=4x^3$
Förenkling ger: $x^5z''+5x^4z'=4x^3$.
Vi väljer bland två olika vägar.
Den ena är att sätta $u=z',\ u'=z''$. Den andra är att konstatera att vänstra ledet är en derivata.
Differentialekvationen $x^5z''+5x^4z'=4x^3$ övergår $(x^5z')'=4x^3$.
Integrera med avseende på x. $x^5z'=x^4+C_1$. $z'=\frac{1}{x}+\frac{C_1}{x^5}$.
Integrera med avseende på x. $z=\ln x-\frac{C_1}{4x^4}+C_2$.
Den ursprungliga inhomogena differentialekvationen har den allmänna lösningen

$$y = x^3(\ln x - \frac{C_3}{x^4} + C_2) = x^3 \ln x - \frac{C_3}{x} + C_2 x^3$$

Det återstår att bestämma den lösning som uppfyller villkoren $y(1) = 0$ och $y'(1) = 1$.

$$y' = 3x^2 \ln x + x^2 + \frac{C_3}{x^2} + C_2 3x^2$$

$$\begin{cases} 0 = y(1) = -C_3 + C_2 \\ 1 = y'(1) = 1 + C_3 + C_2 3 \end{cases} \quad \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_3 = 0 \end{cases}$$

Insättning av konstanterna ger: $y = x^3 \ln x \;\; , \; x > 0$.

SVAR: Den sökta lösningen är $y = x^3 \ln x \;\; , \; x > 0$.

<u>Modul 3.</u>

Den 2π-periodiska funktionen g ges av $g(x) = \begin{cases} 2 + x & , \quad 0 \le x < \pi \\ 2 - x & , \; -\pi < x < 0 \end{cases}$.

Bestäm g:s fourierserie samt beräkna med hjälp av denna summan av serien $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}$.

<u>Lösning:</u>

Den givna funktionen är jämn.

g:s fourierserie är på formen $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ där

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(2+x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left\{\left[(2+x)\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1\frac{\sin nx}{n}dx\right\}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left\{\left[\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}\right\} = \frac{2}{\pi}\frac{\cos n\pi - 1}{n^2}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(2+x)dx = \frac{1}{\pi}\left[4x + x^2\right]_0^{\pi} = 4 + \pi$$

g:s fourierserie är $\frac{4+\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\frac{\cos n\pi - 1}{n^2}\cos nx$

För att bestämma den sökta seriens summa utnyttjar vi fourierseriens konvergens.
Fourierserien konvergerar mot medelvärdet av funktionen i den aktuella punkten.
Välj $x = 0$ vilken är en kontinuitetspunkt.

Vi får $2 = g(0) = \frac{4+\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{\cos n\pi - 1}{n^2}$, $-\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi - 1}{n^2}$, $\cos n\pi = (-1)^n$,

$$\cos n\pi - 1 = (-1)^n - 1 = \begin{cases} 0 & , n = 2m \\ -2 & , n = 2m+1 \end{cases} \qquad \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

SVAR: g:s fourierserie är $\frac{4+\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\frac{\cos n\pi - 1}{n^2}\cos nx$

Den sökta seriens summa $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

<u>Del 2</u>

11. Bestäm $y(\frac{3\pi}{2})$ då $y'(t) + \int_0^t y(t-u)\cos\sqrt{3}u du = \delta(t - \frac{\pi}{2})$ och $y(0) = 20$.

<u>Lösning:</u>

Vi bestämmer först ekvationens lösning och därefter insättes det aktuella t-värdet.
Laplacetransformera ekvationen och lös ut den obekanta funktionens laplacetransform..

$$sY(s) - 20 + Y(s)\frac{s}{s^2+3} = e^{-s\frac{\pi}{2}}$$

$$Y(s)\frac{s^3+3s+s}{s^2+3} = e^{-s\frac{\pi}{2}} + 20\ ,\ Y(s) = e^{-s\frac{\pi}{2}}\frac{s^2+3}{s^3+4s} + 20\frac{s^2+3}{s^3+4s}$$

Partialbråksuppdela den rationella funktionen.

$$\frac{s^2+3}{s^3+4s} = \frac{s^2+3}{(s^2+4)s} = \frac{\frac{3}{4}}{s} + \frac{\frac{1}{4}s}{s^2+4}$$

$$Y(s) = e^{-s\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\left(\frac{3}{s} + \frac{s}{s^2+4}\right) + 5\left(\frac{3}{s} + \frac{s}{s^2+4}\right)$$

Återtransformera.

$$y(t) = U(t - \frac{\pi}{2})\frac{1}{4}(3 + \cos 2(t - \frac{\pi}{2})) + 5(3 + \cos 2t)$$

Nu över till bestämning av funktionsvärdet.

$$y(\frac{3\pi}{2}) = U(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2})\frac{1}{4}(3 + \cos 2(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2})) + 5(3 + \cos 3\pi) = 1 + 5\ \ 2 = 11$$

$$y(\frac{3\pi}{2}) = 11$$

SVAR: Det sökta funktionsvärdet $y(\frac{3\pi}{2}) = 11$.

12. Undersök om differentialekvationen $x(x+1)y' - 2(x+1)y + x^2 = 0\ ,\ x > 0$

har några lösningar $y(x)$ med egenskapen att $\frac{y(x)}{x} \to 1,\ \text{då}\ x \to \infty$.

Ange alla sådana lösningar, om de nu finns.

<u>Lösning:</u>

Den givna differentialekvationen är linjär av första ordningen, vilken löses med hjälp av integrerande faktor.

$$y' - \frac{2}{x}y = -\frac{x}{x+1}$$

En integrerande faktor är $e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2}$

Multiplicera differentialekvationen med integrerande faktorn x^{-2}.

. $y'x^{-2} - \frac{2}{x}x^{-2}y = -\frac{x}{x+1}x^{-2}$, $y'x^{-2} - 2x^{-3}y = -\frac{1}{x(x+1)}$, $\frac{d}{dx}\left(x^{-2}y\right) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$

Integrera med avseende på x

$$x^{-2}y = \ln(x+1) - \ln x + C$$

$$y = x^2\left(\ln(1 + \frac{1}{x}) + C\right)$$

Nu över till villkoret. $\frac{y(x)}{x} \to 1,\ \text{då}\ x \to \infty$.

$$\frac{y}{x} = x\left(\ln(1 + \frac{1}{x}) + C\right)$$

Omformning med hjälp av MacLaurinutveckling ger

$$x\ln(1 + \frac{1}{x}) = x(\frac{1}{x} + O(\frac{1}{x^2})) = 1 + O(\frac{1}{x}) \to 1\ \ ,\ x \to \infty$$

Villkoret $\frac{y(x)}{x} \to 1,\ \text{då}\ x \to \infty$ är uppfyllt då $C = 0$.

SVAR: Den sökta lösningen är $y = x^2\ln(1 + \frac{1}{x})\ \ ,\ x > 0$.

13. Vad menas med fundamentallösningar till systemet av linjära differentialekvationer $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$.

Systemet har följande lösningar: $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 2e^t \\ e^t \end{pmatrix}$, $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$, $\mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 14e^t \\ 7e^t \end{pmatrix}$ och $\mathbf{X}_4 = \begin{pmatrix} 4e^t + 3e^{3t} \\ 2e^t + 3e^{3t} \end{pmatrix}$.

Bestäm en fundamentalmatris till systemet. Bestäm därefter den konstanta matrisen $\mathbf{A}$.
Låt matrisen $\mathbf{B}$ vara 2x2 och ha multipelt egenvärde λ med endast en tillhörande egenvektor $\mathbf{K}$.
Ange först en lösning, $\mathbf{X}_1$, till systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{BX}$. Matrisen $\mathbf{B}$ är konstant.
Redovisa därefter hur en av $\mathbf{X}_1$ linjärt oberoende lösning till systemet kan bestämmas.

<u>Lösning:</u>
Fundamentallösningar är linjärt oberoende lösningar som spänner upp lösningsrummet.
För att bestämma en fundamentalmatris behövs i detta fall två linjärt oberoende lösningar.
$\mathbf{X}_1$ och $\mathbf{X}_2$ är linjärt oberoende av varandra. Däremot är $\mathbf{X}_3$ linjärt oberoende av $\mathbf{X}_1$.
Vidare är $\mathbf{X}_4$ en linjärkombination av $\mathbf{X}_1$ och $\mathbf{X}_2$. Vi väljer $\mathbf{X}_1$ och $\mathbf{X}_2$.

Då bli en fundamentalmatris $\Phi = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{3t} \\ e^t & e^{3t} \end{pmatrix}$.

Varje kolonn i fundamentalmatrisen uppfyller systemet. Vi har ekvationen $\dot{\Phi} = \mathbf{A}\Phi$.
Vi får den konstanta matrisen $\mathbf{A}$ genom att multiplicera från höger med fundamentalmatrisens invers.

Vi erhåller $\mathbf{A} = \dot{\Phi}\Phi^{-1}$. Fundamentalmatrisens invers $\Phi^{-1} = \frac{1}{e^{4t}} \begin{pmatrix} e^{3t} & -e^{3t} \\ -e^t & 2e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{-3t} & 2e^{-3t} \end{pmatrix}$.

Vi får $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2e^t & 3e^{3t} \\ e^t & 3e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{-3t} & 2e^{-3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

En lösning är $\mathbf{X}_1 = e^{\lambda t}\mathbf{K}$. Vi ansätter $\mathbf{X}_2 = e^{\lambda t}(\mathbf{E}t + \mathbf{F})$ där $\mathbf{E}$ och $\mathbf{F}$ är konstanta matriser.
Insättning i systemet $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{BX}$ ger $e^{\lambda t}\lambda(\mathbf{E}t + \mathbf{F}) + e^{\lambda t}\mathbf{E} = \mathbf{B}e^{\lambda t}(\mathbf{E}t + \mathbf{F})$.

Identifiering ger följande system: $\begin{cases} t: \ \lambda\mathbf{E} = \mathbf{BE} \\ t^0: \lambda\mathbf{F} + \mathbf{E} = \mathbf{BF} \end{cases}$ $\begin{cases} (\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{E} = \mathbf{0} \\ (\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{F} = \mathbf{E} \end{cases}$ $\begin{cases} (\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{E} = \mathbf{0} \\ (\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})^2\mathbf{F} = \mathbf{0} \end{cases}$.

Matrisen $\mathbf{E}$ är en egenvektor till $\mathbf{B}$ och $\mathbf{F}$ en generaliserad egenvektor till $\mathbf{B}$.

SVAR: En fundamentalmatris är $\Phi = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{3t} \\ e^t & e^{3t} \end{pmatrix}$ och matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

För övrigt se ovan.

14. a) Bestäm de lösningar till differentialekvationen $y'' + \lambda y = 0$, λ är större än noll,
som uppfyller randvillkoren $y(0) = 0$ och $y'(\pi) = 0$.
b) Visa att de i a) erhållna funktionerna, som är linjärt oberoende, är ortogonala på intervallet $[0, \pi]$.
c) Bestäm de lösningar till den partiella differentialekvationen $u'_t = u''_x$
som uppfyller randvillkoren $u(0,t) = 0$ och $u'_x(\pi, t) = 0$.

<u>Lösning:</u>
a) λ är större än noll gör att vi kan sätta $\lambda = \mu^2$ där $\mu \in R$.
Insättning i differentialekvationen ger $y'' + \mu^2 y = 0$. De karakteristiska rötterna är $r = \pm i\mu$.
Lösningarna är på formen $y = A\cos\mu x + B\sin\mu x$.
Vi utnyttjar de givna randvillkoren. Då behövs även $y' = -\mu A\sin\mu x + \mu B\cos\mu x$.

Randvillkoren ger oss följande system: $\begin{cases} y(0) = 0 = A \\ y'(\pi) = 0 = -\mu A\sin\mu\pi + \mu B\cos\mu\pi \end{cases}$.

Icke-triviala lösningarna erhålles då $\cos\mu\pi = 0$, dvs då $\mu\pi = \frac{(2n-1)\pi}{2}$, $n = 1,2,\ldots\ldots$

De icke-triviala lösningarna är på formen $y = B_n \sin\frac{(2n-1)x}{2}$, $n = 1,2,\ldots.$.

b) Vi visar att inre produkten $\int_0^{\pi} \sin\frac{(2n-1)x}{2}\sin\frac{(2m-1)x}{2}\,dx = 0 \quad , n \neq m$.

Vi omformar vänstra ledet. $VL = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left\{\cos\frac{(2n-2m)x}{2} - \cos\frac{(2n+2m-2)x}{2}\right\}dx$

Integration ger: $VL = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{(n-m)}\sin(n-m)x + \frac{1}{(n-m-1)}\sin(n-m-1)x\right]_0^{\pi} = 0$

Vi har erhållit $\int_0^{\pi} \sin\frac{(2n-1)x}{2}\sin\frac{(2m-1)x}{2}\,dx = 0 \quad , n \neq m$.

c) Vi använder variabelseparation för att bestämma lösningar till den partiella differentialekvationen $u'_t = u''_x$. Sätt $u(x,t) = X(x)T(t)$

Insättning ger: $X(x)T'(t) = X''(x)T(t)$. Denna ekvation kan skrivas $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \text{konstant} = \lambda_1$.

Den partiella differentialekvationen övergår i ett system: $\begin{cases} X''(x) - \lambda_1 X(x) = 0 \\ T'(t) - \lambda_1 T(t) = 0 \end{cases}$.

Här observerar vi att x-ekvationen med motsvarande randvillkor svarar mot deluppgift a.

Med $\lambda_1 = -\lambda$ övergår x-ekvationen i $X''(x) + \lambda X(x) = 0$.

Randvillkoren $u(0,t) = 0$ och $u'_x(\pi,t) = 0$ tillsammans med variabelseparationen $u(x,t) = X(x)T(t)$ ger randvillkoren $X(0) = 0$ och $X'(\pi) = 0$.

Detta innebär att $X = B_n \sin\frac{(2n-1)x}{2} \quad , n = 1,2,.....$.

Vidare har "T-ekvationen" lösningar på formen $T = C_n e^{-\frac{(2n-1)^2 t}{2^2}} \quad , n = 1,2,....$.

Lösningar till den partiella differentialekvationen är på formen

$$u_n(x,t) = a_n \sin\frac{(2n-1)x}{2} e^{-\frac{(2n-1)^2 t}{2^2}} \quad , n = 1,2,....$$

Även linjärkombinationer är lösningar.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{(2n-1)x}{2} e^{-\frac{(2n-1)^2 t}{2^2}}$$

SVAR: a) De icke-triviala lösningarna är på formen $y = B_n \sin\frac{(2n-1)x}{2} \quad , n = 1,2,....$.

b) Se ovan

c) $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{(2n-1)x}{2} e^{-\frac{(2n-1)^2 t}{2^2}}$

15. Tillväxten av en cell beror av flödet av näringsämnen(som exempelvis aminosyror) genom det omslutande cellmembranet.
Låt $W(t)$ vara cellens massa i gram vid tiden t , mätt i timmar, med $W(0) = W_0$.
Antag att massans tillväxthastighet är proportionell mot membranets yta och att densiteten (i g/volymsenhet) är konstant. Cellen förutsätts ha formen av ett klot (en sfär).

a) Härled att differentialekvationen för W bör ha formen $\frac{dW}{dt} = kW^{2/3}$ där k är en konstant.

b) Bestäm $W(t)$ om $W_0 = 10^{-6}$ g och om massan efter 1 timme är $1{,}1^3 \; 10^{-6}$ g ($1{,}331 \; 10^{-6}$ g) .

c) Antag att cellen börjar dela sig då massan fördubblats, dvs är $2 \; 10^{-6}$ g.
När startar celldelningen? (För ett numeriskt värde behövs att $\sqrt[3]{2} \approx 1{,}26$.)

<u>Lösning:</u>

a) Cellens massa är $W = \rho V = \rho\frac{4\pi}{3}r^3$, ρ är densiteten och r är sfärens radie.

Membranets area är $A = 4\pi r^2$. Uttryck A i W. $A = 4\pi((\frac{3W}{4\pi\rho})^{1/3})^2 = 4\pi((\frac{3}{4\pi\rho})^{2/3}W^{2/3} = k_1 W^{2/3}$.

Massans tillväxthastighet är proportionell mot membranets area ger: $\frac{dW}{dt} = k_2 A = k_2 k_1 W^{2/3} = kW^{2/3}$.

b) $\frac{dW}{dt} = kW^{2/3}$ är separabel , dock saknar den triviala lösningen intresse.

Omforma differentialekvationen: $W^{-2/3}\frac{dW}{dt} = k$.

Vi integrerar med avseende på t: $3W^{1/3} = kt + C$.

Begynnelsevillkoret $W(0) = 10^{-6}$ ger: $3(10^{-6})^{1/3} = C$, $C = 3\ 10^{-2}$. $3W^{1/3} = kt + 3\ 10^{-2}$.

Bestäm k. Efter 1 timme är massan $1{,}1^3\ 10^{-6}$g.

$3(1{,}1^3\ 10^{-6})^{1/3} = k + 3\ 10^{-2}$, $k = 3\ 0{,}1\ 10^{-2} = 3\ 10^{-3}$, $3W^{1/3} = 3\ 10^{-3}t + 3\ 10^{-2}$.

Cellens massa vid tiden t ges av $W(t) = 10^{-6}(0{,}1t + 1)^3 g$.

c) Bestäm tidpunkten, t_2, då cellens massa är fördubblad.

$2\ 10^{-6} = 10^{-6}(0{,}1t_2 + 1)^3$, $t_2 = 10(2^{1/3} - 1) \approx 10(1{,}26 - 1) = 2{,}6$.

Cellens massa är fördubblad efter $2{,}6$ timmar.

SVAR: a) se ovan.

b) Cellens massa vid tiden t ges av $W(t) = 10^{-6}(0{,}1t + 1)^3 g$.

c) Cellens massa är fördubblad efter $2{,}6$ timmar.