Tentamensskrivning i Differentialekvationer I, SF1633(5B1206).

Tisdagen den 16 augusti 2011, kl 1400-1900.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Del 1 är avsedd för betyg E och omfattar 3 uppgifter.
För betyg E krävs 3 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, A, B, C och D, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg A krävs förutom 3 godkända moduler även 15 poäng på del 2.
För betyg B krävs förutom 3 godkända moduler även 11 poäng på del 2.
För betyg C krävs förutom 3 godkända moduler även 7 poäng på del 2.
För betyg D krävs förutom 3 godkända moduler även 3 poäng på del 2.

De som har registrering på 5B1206 erhåller betyg enligt nedan.
Tentamen är tvådelad.
Del 1 är avsedd för betyg 3 och omfattar 3 uppgifter.
För betyg 3 krävs 3 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, 4 och 5, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg 4 krävs förutom 3 godkända moduler även 8 poäng på del 2.
För betyg 5 krävs förutom 3 godkända moduler även 14 poäng på del 2.
Uppgifterna 11-15 ger 4 poäng vardera.

<u>Del 1</u>
<u>Modul 1.</u>

En matematisk modell ges av $\dfrac{dP(t)}{dt} = P(t)(a + bP(t)) - c$, där $a = 5$, $b = -1$ och $c = 4$.
Hur kan denna modell tolkas ?
Studera lösningskurvorna och bestäm vad som händer efter lång tid för alla startvärden $P(0)$.

<u>Modul 2.</u>

Låt $y = x^3$ vara en lösning till differentialekvationen $x^2y'' - xy' - 3y = 0 \quad , x > 0$.
Bestäm den lösning till differentialekvationen $x^2y'' - xy' - 3y = 4x^3 \quad , x > 0$ som uppfyller villkoren $y(1) = 0$ och $y'(1) = 1$.

<u>Modul 3.</u>

Den 2π-periodiska funktionen g ges av $g(x) = \begin{cases} 2 + x & , \quad 0 \le x < \pi \\ 2 - x & , \ -\pi < x < 0 \end{cases}$.

Bestäm g:s fourierserie samt beräkna med hjälp av denna summan av serien $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}$.

Del 2

11. Bestäm $y(\frac{3\pi}{2})$ då $y'(t)+\int_0^t y(t-u)\cos\sqrt{3}u\,du = \delta(t-\frac{\pi}{2})$ och $y(0)=20$.

12. Undersök om differentialekvationen $x(x+1)y' - 2(x+1)y + x^2 = 0$, $x > 0$
har några lösningar $y(x)$ med egenskapen att $\frac{y(x)}{x} \to 1$, då $x \to \infty$.
Ange alla sådana lösningar, om de nu finns.

13. Vad menas med fundamentallösningar till systemet av linjära differentialekvationer $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$.
Systemet har följande lösningar: $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 2e^t \\ e^t \end{pmatrix}$, $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$, $\mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 14e^t \\ 7e^t \end{pmatrix}$ och $\mathbf{X}_4 = \begin{pmatrix} 4e^t + 3e^{3t} \\ 2e^t + 3e^{3t} \end{pmatrix}$.
Bestäm en fundamentalmatris till systemet. Bestäm därefter den konstanta matrisen $\mathbf{A}$.
Låt matrisen $\mathbf{B}$ vara 2x2 och ha multipelt egenvärde λ med endast en tillhörande egenvektor $\mathbf{K}$.
Ange först en lösning, $\mathbf{X}_1$, till systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{B}\mathbf{X}$. Matrisen $\mathbf{B}$ är konstant.
Redovisa därefter hur en av $\mathbf{X}_1$ linjärt oberoende lösning till systemet kan bestämmas.

14. a) Bestäm de lösningar till differentialekvationen $y'' + \lambda y = 0$, λ är större än noll,
som uppfyller randvillkoren $y(0)=0$ och $y'(\pi)=0$.
b) Visa att de i a) erhållna funktionerna, som är linjärt oberoende, är ortogonala på intervallet $[0,\pi]$.
c) Bestäm de lösningar till den partiella differentialekvationen $u_t' = u_x''$
som uppfyller randvillkoren $u(0,t)=0$ och $u_x'(\pi,t)=0$.

15. Tillväxten av en cell beror av flödet av näringsämnen(som exempelvis aminosyror) genom det omslutande cellmembranet.
Låt $W(t)$ vara cellens massa i gram vid tiden t, mätt i timmar, med $W(0)=W_0$.
Antag att massans tillväxthastighet är proportionell mot membranets yta och att densiteten (i g/volymsenhet) är konstant. Cellen förutsätts ha formen av ett klot (en sfär).
a) Härled att differentialekvationen för W bör ha formen $\frac{dW}{dt} = kW^{2/3}$ där k är en konstant.
b) Bestäm $W(t)$ om $W_0 = 10^{-6}$ g och om massan efter 1 timme är $1{,}1^3\ 10^{-6}$ g ($1{,}331\ 10^{-6}$ g).
c) Antag att cellen börjar dela sig då massan fördubblats, dvs är $2\ 10^{-6}$ g.
När startar celldelningen? (För ett numeriskt värde behövs att $\sqrt[3]{2} \approx 1{,}26$.)