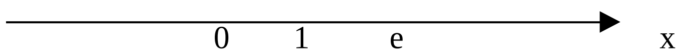
Kompletteringstentamen i Differentialekvationer I, SF1633(5B1206).

September 2011, Skrivtid 60 minuter.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

<u>Modul 1.</u>
Bestäm lösningen till begynnelsevärdesproblemet $xy' + y = xy^2, \; x > 0 \quad , y(1) = 1$.
Ange även lösningens existensintervall.
<u>Lösning.</u>
Differentialekvationen är av Bernoulli typ.
Omforma differentialekvationen $xy^{-2}y' + y^{-1} = x$.
Sätt $z = y^{-1}, \; z' = -y^{-2}y'$ och vi erhåller $-xz' + z = x$.
Vi har erhållit en linjär differentialekvation av första ordningen.
Skriv om differentialekvationen och bestäm en integrerande faktor.
Omformning ger $z' - \dfrac{1}{x}z = -1$. En integrerande faktor är $e^{\int \frac{-1}{x}dx} = x^{-1}$.
Multiplicera differentialekvationen med x^{-1} och vi erhåller $x^{-1}z' - x^{-2}z = -x^{-1}$.
Observera att det nya vänstra ledet är en derivata. Vi får $(x^{-1}z)' = -x^{-1}$.
Integrera med avseende på x: $x^{-1}z = -\ln x + C$.
Bestäm konstanten C. Begynnelsevillkoret ger $1 = -\ln 1 + C$, $C = 1$.
Insättning ger: $x^{-1}z = -\ln x + 1$, $z = \dfrac{1 - \ln x}{x}$ vilket ger $y = \dfrac{x}{1 - \ln x}$.
Vi har att $1 - \ln x \neq 0 \quad , x \neq e$. Nu över till lösningens existensintervall.
Det delintervall som innehåller $x = 1$ skall väljas.



Det aktuella existensintervallet är $\{x \;:\; 0 < x < e\}$

SVAR: Begynnelsevärdesproblemets lösning är $y = \dfrac{x}{1 - \ln x}$
och dess existensintervall är $\{x \;:\; 0 < x < e\}$.

<u>Modul 2.</u>
Bestäm den stationära lösningen till systemet $\dfrac{d\mathbf{X}}{dt} = \begin{pmatrix} 4 & 15 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{X}$.
Ange typ och huruvida den är stabil eller instabil.
Bestäm den allmänna lösningen samt ange även den lösning som går genom punkten $(9, -3)$.
Avgör slutligen vad som händer med en partikel som placeras i punkten $(9, -3)$ efter lång tid.
Partikelns rörelse förutsättes ges av det givna systemet.
<u>Lösning.</u>
Origo är den enda stationära punkten.
Vi bestämmer först matrisens egenvärden och tillhörande egenvektorer.
Egenvärdena erhålles ur ekvationen $0 = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 15 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$, $\lambda^2 - 6\lambda - 7 = (\lambda + 1)(\lambda - 7) = 0$.
Egenvärdena är $\lambda_1 = -1 \quad , \lambda_2 = 7$. Den stationära lösningen är en sadelpunkt och därmed instabil.
Vi bestämmer en egenvektor till respektive egenvärde.
Dessa erhålles ur ekvationen $\begin{pmatrix} 4-\lambda & 15 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}\mathbf{K} = \mathbf{0}$ med aktuellt egenvärde insatt.

$\underline{\lambda_1 = -1}$ ger $\begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{K}_1 = \mathbf{0}$ och vi får $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$.

$\underline{\lambda_2 = 7}$ ger $\begin{pmatrix} -3 & 15 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}\mathbf{K}_2 = \mathbf{0}$ och vi får $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t}$.

Den allmänna lösningen ges av en linjärkombination av $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$ och $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t}$.

Vi får $\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t}$, där c_1 och c_2 är godtyckliga konstanter.

Den lösning som går genom punkten $(9,-3)$ är $\mathbf{X} = 3\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$.

En partikel som placeras i punkten $(9,-3)$ går mot den stationära punkten, origo.

SVAR: Origo är den enda stationära punkten.

Den stationära lösningen är en sadelpunkt och därmed instabil.

Den allmänna lösningen ges av $\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t}$.

Den lösning som går genom punkten $(9,-3)$ är $\mathbf{X} = 3\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$.

En partikel som placeras i punkten $(9,-3)$ går mot den stationära punkten, origo.

<u>Modul 3.</u>

Bestäm $y(t)$ då $y(t) + 2\int_0^t \cos(t-u)y(u)\,du = 1 \quad , t \geq 0$.

Ange även $y(0)$.

<u>Lösning:</u>

Vi laplacetransformerar ekvationen.

$Y(s) + 2\dfrac{s}{s^2+1}Y(s) = \dfrac{1}{s}$

Lös ut $Y(s)$: $\dfrac{s^2+1+2s}{s^2+1}Y(s) = \dfrac{1}{s}$, $Y(s) = \dfrac{s^2+1}{s(s+1)^2}$.

Partialbråksuppdelning ger: $Y(s) = \dfrac{1}{s} - \dfrac{2}{(s+1)^2}$.

Återtransformera: $y(t) = 1 - 2te^{-t}$.

$y(0)$ kan erhållas direkt från den ursprungliga ekvationen.

Vi får då $y(0) = 1$, vilket överensstämmer med resultatet från lösningen $y(t) = 1 - 2te^{-t}$.

SVAR: Ekvationen lösning är $y(t) = 1 - 2te^{-t}$ och det sökta funktionsvärdet är $y(0) = 1$.