KTH Matematik
Tentamensskrivning i Differentialekvationer I, SF1633.
Måndagen den 17 oktober 2011, kl 0800-1300.
Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.
Del 1 är avsedd för betyg E och omfattar 3 uppgifter.
För betyg E krävs 3 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, A, B, C och D, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg A krävs förutom 3 godkända moduler även 15 poäng på del 2.
För betyg B krävs förutom 3 godkända moduler även 11 poäng på del 2.
För betyg C krävs förutom 3 godkända moduler även 7 poäng på del 2.
För betyg D krävs förutom 3 godkända moduler även 3 poäng på del 2.
Del 1
Modul 1. En termometer tas inifrån ett rum och ut, där temperaturen är 5°C.
Efter 1 minut avläses 15°C och efter 2 minuter avläses 10°C. Vad är rummets temperatur?
Ledning: Antag att Newtons avsvalningslag gäller, dvs att avsvalningshastigheten är proportionell mot temperaturdifferensen.
Lösning:
Låt $T(t)$ vara termometerns temperatur vid tiden t .
Vid tiden $t = 0$ sammanfaller termometerns temperatur med rummets temperatur. Bestäm $T(0)$.
Enligt den givna ledningen gäller att: $T' = k(T-5)$, där k är en proportionalitetskonstant.
Differentialekvationen kan omformas till: $T' - kT = -5k$.
Vi skriver direkt upp lösningen som summan av allmänna homogena lösningen plus en partikulärlösning: $T(t) = Ce^{kt} + 5$.
De givna villkoren ger: $\begin{cases} 15 = T(1) = Ce^{k} + 5 \\ 10 = T(2) = Ce^{2k} + 5 \end{cases} \begin{cases} 10 = Ce^{k} \\ 5 = Ce^{2k} \end{cases} \begin{cases} 2 = e^{-k},\ k = -\ln 2 \\ 5 = Ce^{2(-\ln 2)} = C2^{-2},\ C = 20 \end{cases}$.
Termometerns temperatur är $T(t) = 20e^{-t\ln 2} + 5 = 20\cdot 2^{-t} + 5$ och $T(0) = 20\cdot 1 + 5 = 25$
SVAR: Rummets temperatur är 25°C.

Modul 2.
Låt $y_1(x) = 3x,\ y_2(x) = x + 2x^2,\ y_3(x) = 2x + 5x^2$ och $y_4(x) = 7x + x^2$ vara lösningar till en linjär homogen differentialekvation av ordning två.
Vidare är $y_p = x\ln x$, $x > 0$ lösning till motsvarande inhomogena differentialekvation.
Bestäm den lösning till den inhomogena differentialekvationen som uppfyller villkoren $y(1) = 0$ och $y'(1) = 3$.
Lösning:
Den allmänna lösningen till en linjär differentialekvation av ordning två består av summan av den allmänna homogena lösningen och en partikulärlösning till den inhomogena differentialekvationen.
Av de givna homogena lösningarna väljer vi två linjärt oberoende lösningar.
Vi väljer $y_a = x$ och $y_b = x^2$.
De givna lösningarna kan erhållas som linjärkombinationer av $y_a = x$ och $y_b = x^2$
Den allmänna lösning till den inhomogena differentialekvationen kan skrivas som

$y(x) = c_1 x + c_2 x^2 + x \ln x$.

För att bestämma konstanterna behövs även derivatan. $y'(x) = c_1 + c_2 2x + \ln x + x\frac{1}{x}$.

Insättning av villkoren ger $\begin{cases} 0 = y(1) = c_1 + c_2 + 0 \\ 3 = y'(1) = c_1 + c_2 2 + 1 \end{cases}$ vilket ger $\begin{cases} c_2 = 2 \\ c_1 = -2 \end{cases}$.

Vi får $y(x) = -2x + 2x^2 + x \ln x$

SVAR: Den sökta lösningen är $y(x) = -2x + 2x^2 + x \ln x$.

Modul 3.

Undersök om $f_1(x) = x$ och $f_2(x) = x^2$ är ortogonala på intervallet $(-2,2)$.

Den inre produkten ges av $\int_{-2}^{2} f_1(x) f_2(x) dx$. Bestäm därefter konstanterna c_1 och c_2 så att $f_3(x) = x + c_1 x^2 + c_2 x^3$ blir ortogonal mot både f_1 och f_2 på samma intervall.

<u>Lösning:</u>

Vi undersöker om funktionerna är ortogonala genom att först bestämma den inre produkten mellan dessa. Om den inre produkten är lika med noll så är funktionerna ortogonala.

$\int_{-2}^{2} f_1(x) f_2(x) dx = \int_{-2}^{2} x x^2 dx = \int_{-2}^{2} x^3 dx = 0$, ty udda funktion och origosymmetriskt intervall.

Den inre produkten är lika med noll och således är funktionerna ortogonala.

Vi skall bilda ett ortogonalt system med hjälp av funktionerna f_1, f_2 och f_3.

Inre produkten mellan f_1 och f_3 lika med noll ger: $0 = \int_{-2}^{2} f_1(x) f_3(x) dx = \int_{-2}^{2} x(x + c_1 x^2 + c_2 x^3) dx$

Inre produkten mellan f_2 och f_3 lika med noll ger: $0 = \int_{-2}^{2} f_2(x) f_3(x) dx = \int_{-2}^{2} x^2(x + c_1 x^2 + c_2 x^3) dx$

Vi erhåller följande system: $\begin{cases} 0 = 2\left(\frac{2^3}{3} + c_2 \frac{2^5}{5}\right) \\ 0 = 2\left(c_1 \frac{2^5}{5}\right) \end{cases}$ $\begin{cases} c_2 = -\frac{5}{12} \\ c_1 = 0 \end{cases}$.

Det polynom f_3 som är ortogonalt mot f_1 och f_2 är $f_3(x) = x - \frac{5}{12} x^3$.

SVAR: $f_1(x) = x$ och $f_2(x) = x^2$ är ortogonala på intervallet $(-2,2)$. $c_1 = 0$ och $c_2 = -\frac{5}{12}$.

<u>Del 2</u>

11. a) En lösning till begynnelsevärdes problemet $y' = y^4$, $y(0) = 0$ ges av $y \equiv 0$.
Är lösningen entydig?

b) $y = x^3$ är en lösning till $y' = 3y^{2/3}$, $y(0) = 0$.
Är lösningen entydig?

c) Ange det största intervall i vilket lösningen till ekvationen $y' = 3x^2(y^2 + 1)$, $y(1) = 1$ existerar.
Är lösningen entydig?

<u>Lösning:</u>

a) Funktionen $f(y) = y^4$ och dess derivata $\dfrac{df(y)}{dy} = 4y^3$ är kontinuerliga.

Enligt entydighetssatsen är lösningen entydig.

b) Lösningen är ej entydig, ty en annan lösning till begynnelsevärdes problemet är $y \equiv 0$.

c) Vi bestämmer först lösningen till differentialekvationen och bestämmer därefter integrationskonstanten. Ekvationen är separabel och vi får $\dfrac{y'}{1+y^2} = 3x^2$.

Integration med avseende på x ger: $\arctan y = x^3 + C$.

Bestäm integrationskonstanten. Villkoret ger: $C = \arctan 1 - 1 = \dfrac{\pi}{4} - 1 = \dfrac{\pi - 1}{4}$.

Insättning ger: $\arctan y = x^3 + \dfrac{\pi - 4}{4}$, $y = \tan\left(x^3 + \dfrac{\pi - 4}{4}\right)$.

Vi har att $-\dfrac{\pi}{2} < \arctan y < \dfrac{\pi}{2}$ vilket ger följande olikheter $-\dfrac{\pi}{2} < x^3 + \dfrac{\pi - 4}{4} < \dfrac{\pi}{2}$.

Lös ut x: $-\dfrac{3\pi}{4} + 1 < x^3 < \dfrac{\pi}{4} + 1$, $-\sqrt[3]{\dfrac{3\pi - 4}{4}} < x < \sqrt[3]{\dfrac{\pi + 4}{4}}$.

$f(x,y) = 3x^2(y^2 + 1)$ och $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3x^2 2y$ är kontinuerliga.

Enligt entydighetssatsen är lösningen entydig.

SVAR: a) Entydig b) Ej entydig

c) Entydig och existensintervallet är $\left\{ x : -\sqrt[3]{\dfrac{3\pi - 4}{4}} < x < \sqrt[3]{\dfrac{\pi + 4}{4}} \right\}$.

12. Klassificera med avseende på stabilitet och typ de kritiska punkterna till ett plant autonomt system svarande mot den icke-linjära andra ordningens differentialekvation $x'' - (x^2 - 1)x' + x = 0$.

<u>Lösning:</u>

Vi skriver om differentialekvationen genom att sätta $y = x'$ och $y' = x'' = (x^2 - 1)x' - x$.

Vi får $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ (x^2 - 1)y - x \end{pmatrix}$. I de kritiska punkterna är hastighetsvektorn $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Den enda kritiska punkten är origo.

Vi undersöker typ och stabilitet genom att linjarisera med hjälp av Jacobimatrisen och bestämma dess egenvärden.

Jacobimatrisen $\mathbf{J}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2xy - 1 & x^2 - 1 \end{pmatrix}$

Insättning av den kritiska punkten ger den konstanta matrisen vars egenvärden bestämmes.

$$\mathbf{J}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}$$

Egenvärdena fås ur ekvationen $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \mathbf{0}$.

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 1 = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \qquad \lambda = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vi har komplexa egenvärden med negativ realdel.
Det innebär att den stationära lösningen (kritiska punkten) är en stabil spiral.
SVAR: Den stationära lösningen är en stabil spiral.

13.a) Definiera begreppet fundamentalmatris.
b) Låt Φ vara en given fundamentalmatris till systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$.
Bestäm utgående från detta den konstanta matrisen $\mathbf{A}$.
c) Tillämpa b) på fundamentalmatrisen $\Phi = \begin{pmatrix} e^{-t} & 3e^{4t} \\ -e^{-t} & 2e^{4t} \end{pmatrix}$.

<u>Lösning:</u>
a) Fundamentalmatrisens kolonner består av de linjärt oberoende lösningarna till systemet.
b) Eftersom varje kolonn i fundamentalmatrisen satisfierar systemet så satisfierar även fundamentalmatrisen systemet. Vi får $\Phi' = \mathbf{A}\Phi$ vilken multipliceras från höger med inversen till fundamentalmatrisen. Existensen av inversen är säkerställd ty fundamentalmatrisen består av linjärt oberoende kolonner. Vi får $\Phi'\Phi^{-1} = \mathbf{A}\Phi\Phi^{-1}$ vilket ger $\mathbf{A} = \Phi'\Phi^{-1}$.
c) Nu över till att bestämma den konstanta matrisen $\mathbf{A}$.
Vi behöver derivatan av fundamentalmatrisen. $\Phi' = \begin{pmatrix} -e^{-t} & 12e^{4t} \\ e^{-t} & 8e^{4t} \end{pmatrix}$
Här finns flera olika vägar. En kort väg är att betrakta fundamentalmatrisen för $t = 0$.
Fundamentalmatrisen är $\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ vars invers är $\Phi^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Derivatan av fundamentalmatrisen för $t = 0$ är $\Phi' = \begin{pmatrix} -1 & 12 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$.
Den sökta konstanta matrisen är $\mathbf{A} = \Phi'\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 12 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
SVAR: a) Se ovan. b) Den konstanta matrisen är $\mathbf{A} = \Phi'\Phi^{-1}$. c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>Anmärkning:</u> c) Det ger samma resultat om $\Phi = \begin{pmatrix} e^{-t} & 3e^{4t} \\ -e^{-t} & 2e^{4t} \end{pmatrix}$ användes.
Vidare kan de två linjärt oberoende lösningarna sättas in i systemet $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\mathbf{X}$ och därvid erhålles ett linjärt system med fyra ekvationer och fyra obekanta.

14. Härled utgående från definitionen laplacetransformen av
$f_\varepsilon(t) = \frac{4}{\varepsilon}\{U(t-a) - U(t-(a+\varepsilon))\},\ \varepsilon > 0$.
Här är $U(t)$ Heavisides stegfunktion.
Låt ε gå mot noll i laplacetransformen av $f_\varepsilon(t)$.
Lös begynnelsevärdesproblemet $x'' + 2x' + 5x = f(t),\ x(0) = 1,\ x'(0) = 1$ då $f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(t)$.

Lösning: Insättning av $f_\varepsilon(t)$ i definitionen av laplacetransform ger

$$L\left\{f_\varepsilon(t)\right\}=\int_0^\infty e^{-st}f_\varepsilon(t)dt=\int_0^\infty e^{-st}\frac{4}{\varepsilon}\left\{U(t-a)-U(t-(a+\varepsilon))\right\}dt=\int_a^{a+\varepsilon}e^{-st}\frac{4}{\varepsilon}dt=\frac{4}{\varepsilon s}\left(e^{-sa}-e^{-s(a+\varepsilon)}\right)$$

Låt ε gå mot noll i laplacetransformen $L\left\{f_\varepsilon(t)\right\}$.

Vi behöver MacLaurinutveckling av e^t, $e^t=1+t+t^2H(t)$ där $H(t)$ är en begränsad funktion.

$$L\left\{f_\varepsilon(t)\right\}=\frac{4e^{-sa}}{\varepsilon s}\left(1-e^{-s\varepsilon}\right)=\frac{4e^{-sa}}{\varepsilon s}\left(1-1+s\varepsilon-\varepsilon^2H(\varepsilon)\right)=4e^{-sa}(1+\varepsilon H(\varepsilon))$$

Vi får $\lim_{\varepsilon\to 0}L\left\{f_\varepsilon(t)\right\}=\lim_{\varepsilon\to 0}4e^{-sa}(1+\varepsilon H(\varepsilon))=4e^{-sa}$. Laplacetransformen för $4\delta(t-a)$ har bestämts.

Nu över till differentialekvationen vilken laplacetransformeras.

$$s^2X(s)-sx(0)-x'(0)+2(sX(s)-x(0))+5X(s)=4e^{-sa}$$

Insättning av villkoren och förenkling ger:

$$s^2X(s)-s-1+2(sX(s)-1)+5X(s)=4e^{-sa}$$

$$X(s)\left\{s^2+2s+5\right\}=s+1+2+4e^{-sa}$$

$$X(s)=\frac{(s+1)+2}{(s+1)^2+4}+2e^{-sa}\frac{2}{(s+1)^2+4}$$

Återtransformation ger: $x(t)=e^{-t}(\cos 2t+\sin 2t)+2U(t-a)e^{-(t-a)}\sin 2(t-a)$.

SVAR: För härledningen se ovan.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}L\left\{f_\varepsilon(t)\right\}=4e^{-sa}$$

$$x(t)=e^{-t}(\cos 2t+\sin 2t)+2U(t-a)e^{-(t-a)}\sin 2(t-a)$$

15. a) Vad menas med att två funktioner f och g är ortogonala på ett intervall $\left\{t:0\le t\le L\right\}$ med den inre produkten $\int_0^L f(t)g(t)dt$?

b) Visa att $\left\{\sin nt\right\}_{n=1}^{\infty}$ är ortogonal på intervallet $\left\{t:0\le t\le \pi\right\}$ med den inre produkten $\int_0^\pi f(t)g(t)dt$.

c) Tilldela funktionen f fourierserien $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nt$ och g fourierserien $\sum_{m=1}^{\infty}B_m\sin mt$.

Uttryck integralen $\int_0^\pi f(t)g(t)dt$ i fourierkoefficienterna.

Lösning: a) Två funktioner f och g är ortogonala på ett intervall då inre produkten är noll.

b) Vi visar att inre produkten $\int_0^\pi \sin nt\cdot\sin mt\,dt=0,\ n\ne m$.

$$\int_0^\pi \sin nt\cdot\sin mt\,dt=\int_0^\pi\frac{1}{2}\left(\cos(n-m)t-\cos(n+m)t\right)dt=\left\{n\ne m\right\}=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n-m)t}{n-m}-\frac{\sin(n+m)t}{n+m}\right]_0^\pi=0$$

För $n=m$ erhålles $\int_0^\pi \sin nt\cdot\sin nt\,dt=\int_0^\pi\frac{1}{2}\left(1-\cos 2nt\right)dt=\frac{\pi}{2}$.

c) Insättning av fourierserierna i integralen $\int_0^{\pi} f(t)g(t)dt$ ger:

$$\int_0^{\pi} f(t)g(t)dt = \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin mt dt = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^{\pi} \sin nt \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin mt dt = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\sum_{m=1}^{\infty} B_m \int_0^{\pi} \sin nt \sin mt dt \right)$$

$$\int_0^{\pi} f(t)g(t)dt = \{n = m\} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(B_n \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n B_n$$

SVAR: a) Två funktioner f och g är ortogonala på ett intervall då inre produkten är noll.

b) Se ovan.

c) $\int_0^{\pi} f(t)g(t)dt = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n B_n$