KTH Matematik
Tentamensskrivning i Differentialekvationer I, SF1633.
Måndagen den 17 oktober 2011, kl 0800-1300.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Del 1 är avsedd för betyg E och omfattar 3 uppgifter.
För betyg E krävs 3 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, A, B, C och D, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg A krävs förutom 3 godkända moduler även 15 poäng på del 2.
För betyg B krävs förutom 3 godkända moduler även 11 poäng på del 2.
För betyg C krävs förutom 3 godkända moduler även 7 poäng på del 2.
För betyg D krävs förutom 3 godkända moduler även 3 poäng på del 2.

<u>Del 1</u>

Modul 1.
En termometer tas inifrån ett rum och ut, där temperaturen är 5°C.
Efter 1 minut avläses 15°C och efter 2 minuter avläses 10°C. Vad är rummets temperatur?
Ledning: Antag att Newtons avsvalningslag gäller, dvs att avsvalningshastigheten är proportionell mot temperaturdifferensen.

Modul 2.
Låt $y_1(x) = 3x$, $y_2(x) = x + 2x^2$, $y_3(x) = 2x + 5x^2$ och $y_4(x) = 7x + x^2$ vara lösningar till en linjär homogen differentialekvation av ordning två.
Vidare är $y_p = x\ln x$, $x > 0$ lösning till motsvarande inhomogena differentialekvation.
Bestäm den lösning till den inhomogena differentialekvationen som uppfyller villkoren $y(1) = 0$ och $y'(1) = 3$.

Modul 3.
Undersök om $f_1(x) = x$ och $f_2(x) = x^2$ är ortogonala på intervallet $(-2,2)$.
Den inre produkten ges av $\int_{-2}^{2} f_1(x) f_2(x)dx$. Bestäm därefter konstanterna c_1 och c_2 så att $f_3(x) = x + c_1x^2 + c_2x^3$ blir ortogonal mot både f_1 och f_2 på samma intervall.

vgv

Del 2

11. a) En lösning till begynnelsevärdesproblemet $y' = y^4,\ y(0) = 0$ ges av $y \equiv 0$.
Är lösningen entydig?

b) $y = x^3$ är en lösning till $y' = 3y^{2/3},\ y(0) = 0$.
Är lösningen entydig?

c) Ange det största intervall i vilket lösningen till ekvationen $y' = 3x^2(y^2 + 1),\ y(1) = 1$ existerar.
Är lösningen entydig?

12. Klassificera med avseende på stabilitet och typ de kritiska punkterna till ett plant autonomt system svarande mot den icke-linjära andra ordningens differentialekvation $x'' - (x^2 - 1)x' + x = 0$.

13.a) Definiera begreppet fundamentalmatris.
b) Låt Φ vara en given fundamentalmatris till systemet $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$.
Bestäm utgående från detta den konstanta matrisen $\mathbf{A}$.

c) Tillämpa b) på fundamentalmatrisen $\Phi = \begin{pmatrix} e^{-t} & 3e^{4t} \\ -e^{-t} & 2e^{4t} \end{pmatrix}$.

14. Härled utgående från definitionen laplacetransformen av
$$f_\varepsilon(t) = \frac{4}{\varepsilon}\{U(t-a) - U(t-(a+\varepsilon))\},\ \varepsilon > 0 .$$
Här är $U(t)$ Heavisides stegfunktion.
Låt ε gå mot noll i laplacetransformen av $f_\varepsilon(t)$.
Lös begynnelsevärdesproblemet $x'' + 2x' + 5x = f(t),\ x(0) = 1,\ x'(0) = 1$ då $f(t) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(t)$.

15. a) Vad menas med att två funktioner f och g är ortogonala på ett intervall $\{t : 0 \le t \le L\}$ med den inre produkten $\int_0^L f(t)g(t)dt$?

b) Visa att $\{\sin nt\}_{n=1}^{\infty}$ är ortogonal på intervallet $\{t : 0 \le t \le \pi\}$ med den inre produkten $\int_0^\pi f(t)g(t)dt$.

c) Tilldela funktionen f fourierserien $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt$ och g fourierserien $\sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin mt$.

Uttryck integralen $\int_0^\pi f(t)g(t)dt$ i fourierkoefficienterna.