Kompletteringstentamen i SF1633 Differentialekvationer I
och SF1637 Differentialekvationer och transformer III.

Måndagen den 5 mars 2012, kl 1715-1815.

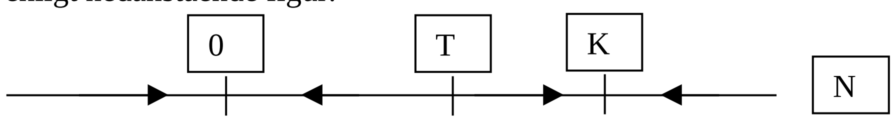
Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

<u>Modul 1.</u>

För en duvart gäller, att den dör ut om inte antalet individer N inom ett visst område överskrider ett tröskelvärde $T > 0$. Å andra sidan finns en nivå $K > T$ sådan att tillgången på föda bara räcker till K individer.
Om den spontana tillväxtkoefficienten är $r > 0$, så modelleras ovanstående med följande differentialekvation för $N = N(t)$ som funktion av tiden t : $\frac{dN}{dt} = -r\left(\frac{N}{T} - 1\right)\left(\frac{N}{K} - 1\right)N$.
Studera denna icke-linjära differentialekvation enligt följande:
a. Bestäm alla stationära lösningar.
b. Avgör för varje stationär lösning om den är stabil eller instabil.
c. Kommentera även rimligheten i det erhållna resultatet.

<u>Lösning:</u>

a. De stationära lösningarna erhålles då derivatan är lika med noll.
Vi erhålles då följande ekvation: $\frac{dN}{dt} = -r\left(\frac{N}{T} - 1\right)\left(\frac{N}{K} - 1\right)N = 0$.
De stationära lösningarna är $N = T$, $N = K$ och $N = 0$.
b. Teckenstudie av derivatan ger information om funktionens växande och avtagande enligt nedanstående figur.



Lösningarna $N = 0$ och $N = K$ är stabila medan $N = T$ är instabil.
c. Resultatet är rimligt eftersom antalet individer går mot noll efter lång tid,
dvs duvarten dör ut om antalet är mindre är tröskelvärde $T > 0$.
Vidare går antalet individer efter lång tid mot K individer till vilka födan räcker.

SVAR: a. De stationära lösningarna är $N = T$, $N = K$ och $N = 0$.
b. Lösningarna $N = 0$ och $N = K$ är stabila medan $N = T$ är instabil.
c. Resultatet är rimligt eftersom antalet individer går mot noll efter lång tid,
dvs duvarten dör ut om antalet är mindre är tröskelvärde $T > 0$.
Vidare går antalet individer efter lång tid mot K individer till vilka födan räcker.

<u>Modul 2.</u>

Differentialekvationen $x^2y'' + xy' - 4y = 0$, $x > 0$ satisfieras av funktionen $y_1 = x^2$.
Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen $x^2y'' + xy' - 4y = 12x^4$, $x > 0$.

<u>Lösning:</u>

Vi ansätter $y = x^2z$. Denna ansats sätter vi in i den inhomogena differentialekvationen.
En annan variant är att sätta in i den homogena differentialekvationen
och erhålla den allmänna homogena lösningen.
Då återstår att bestämma en partikulärlösning vilken erhålles med variation av parametrar.

$x^2\{x^2z'' + 2xz' + 2xz' + 2z\} + x\{x^2z' + 2xz\} - 4x^2z = 12x^4$, $x^4z'' + 5x^3z' = 12x^4$

Här kan ordningen reduceras. Vi sätter $u = z'$, $u' = z''$ och erhåller $x^4u' + 5x^3u = 12x^4$.
Differentialekvationen är linjär och vi omformar den så att vänstra ledet blir en derivata.
Multiplicera med x och integrera med avseende på x:

$x^5u' + 5x^4u = 12x^5$, $(x^5u)' = 12x^5$, $x^5u = 2x^6 + A$, $u = 2x + Ax^{-5}$.

Återsubstitution ger: $z' = 2x + Ax^{-5}$. Integrera med avseende på x: $z = x^2 + Bx^{-4} + C$.
Den allmänna lösningen blir $y = x^2 z = x^2(x^2 + Bx^{-4} + C) = Cx^2 + Bx^{-2} + x^4$.
Här kan allmänna homogena lösningen och en partikulärlösning identifieras.
SVAR: Den allmänna lösningen är $y = Cx^2 + Bx^{-2} + x^4$.

<u>Modul 3.</u>

Bestäm en lösning till $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2\dfrac{\partial u}{\partial t} + u$, $u(x, 0) = 6e^{-3x}$ som är begränsad då $x > 0$ och $t > 0$.

<u>Lösning:</u> Vi använder variabelseparationsmetoden.
Sätt: $u(x,t) = X(x)T(t)$.
Insättning i den partiella differentialekvationen ger: $X'(x)T(t) = 2X(x)T'(t) + X(x)T(t)$.
Utför division med $X(x)T(t)$: $\dfrac{X'(x)}{X(x)} = \dfrac{2T'(t)}{T(t)} + 1 =$ separationskonstant $= \lambda$
Observera att vänstra ledet endast beror av x och högra ledet endast beror av t.
Den partiella differentialekvationen övergår i ett okopplat system av ordinära differentialekvationer.

$$\begin{cases} X'(x) - \lambda X(x) = 0 \\ T'(t) - \dfrac{\lambda - 1}{2} T(t) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} X(x) = Ae^{\lambda t} \\ T(t) = Be^{\frac{\lambda - 1}{2} t} \end{cases}$$

Insättning i separationsansatsen ger: $u(x,t) = Ae^{\lambda t} Be^{\frac{\lambda-1}{2}t} = Ce^{\lambda t + \frac{\lambda - 1}{2}t}$.
Det återstår att bestämma C och λ.
Villkoret ger: $6e^{-3x} = u(x, 0) = Ce^{\lambda x}$, $\begin{cases} C = 6 \\ \lambda = -3 \end{cases}$, $\underline{u(x,t) = 6e^{-3x-2t}}$.
Den erhållna lösningen är begränsad då $x > 0$ och $t > 0$.
SVAR: En lösning är $u(x,t) = 6e^{-3x-2t}$.