Lösningsförslag till tentamensskrivning i SF1633 Differentialekvationer I.

Torsdagen den 31 maj 2012, kl 0800-1300.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

<u>Del 1</u>

<u>Modul 1.</u>

En tank, på 300 liter, innehåller 100 liter vatten och 50 gram salt.
En saltlösning med 2 gram per liter pumpas in med hastigheten av 4 liter per sekund.
Den välblandade lösningen pumpas ut med en hastighet av 2 liter per sekund.
Bestäm när tanken är full samt ange saltmängden i tanken vid detta tillfälle.

<u>Lösning:</u>

Låt $S(t)$ vara saltmängden i tanken vid tiden t .
Vi ställer upp begynnelsevärdesproblemet för tanken.

$$\frac{dS(t)}{dt} = 4\ \ 2 - 2\ \ \frac{S(t)}{100 + t(4-2)}\ ,\ S(0) = 50$$

Vi har en linjär differentialekvation av första ordningen och vi bestämmer dess lösning med hjälp av integrerande faktor. Om forma först differentialekvationen $\frac{dS(t)}{dt} + \frac{1}{50+t}S(t) = 8$.

En integrerande faktor är $e^{\int \frac{dt}{50+t}} = e^{\ln(50+t)} = 50 + t$. Multiplicera differentialekvationen med $50+t$.

Vi får $(50+t)\frac{dS(t)}{dt} + S(t) = 8(50+t)$

och det nya vänstra ledet är en derivata $\frac{d}{dt}\big((50+t)S(t)\big) = 8(50\ \ + t)$.

Integrera med avseende på t: $(50+t)S(t) = 4(50+t)^2 + C$.

Villkoret $S(0) = 50$ ger $C = 50\ \ 50 - 4(50)^2 = -3\ \ 2500 = -7500$.

Saltmängden i tanken vid tiden t är $S(t) = \frac{4(50+t)^2 - 7500}{50+t} = 4(50+t) - \frac{7500}{50+t}$.

Vi skall bestämma tidpunkten, t_f, då tanken är full.

Den erhålles ur ekvationen $300 = 100 + t_f(4-2)$ vilket ger $t_f = 100$.

Saltmängden vid full tank är $S(100) = 4(50+100) - \frac{7500}{50+100} = 600 - 50 = 550$.

SVAR: Tanken är full efter $t_f = 100$ sekunder och då är saltmängden 550 gram.

<u>Modul 2.</u>

Betrakta det linjära systemet $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$, där $\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}$ och $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Den konstanta matrisen $\mathbf{A}$ uppfyller följande ekvationer: $\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{A}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Bestäm $\mathbf{X}(t)$ då $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

<u>Lösning:</u>

Vi börjar med att bestämma matrisens egenvärden och egenvektorer.
Egenvärdena kan erhållas ur ekvationen $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ och egenvektorerna ur $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}$.
Nu är inte matrisen $\mathbf{A}$ given direkt utan med hjälp av två ekvationer.
Om man betänker att ekvationen $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}$ kan skrivas $\mathbf{A}\mathbf{K} = \lambda\mathbf{K}$ så behöver $\mathbf{A}$ ej bestämmas.

Vi får direkt att $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\lambda_2 = 2$, $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Två linjärt oberoende lösningar till systemet är $\mathbf{X}_1 = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{X}_2 = e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Systemets allmänna lösning kan skrivas $\mathbf{X} = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bestäm konstanterna så att villkoret $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ blir uppfyllt.

Vi får $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ vilket ger $c_1 = 2$, $c_2 = 1$ och $\mathbf{X}(t) = 2e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

SVAR: Den sökta lösningen till systemet är $\mathbf{X}(t) = 2e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Modul 3.

Bestäm $f(t)$ då $f(t) = 2\int_0^t f(u)\cos 2(t-u)\,du + 3\sin 2t \quad , t \geq 0$.

Lösning:

Laplacetransformera ekvationen: $F(s) = 2F(s)\dfrac{s}{s^2+4} + 3\dfrac{2}{s^2+4}$.

Lös ut $F(s)$.

$F(s)\left(s^2 + 4 - 2s\right) = 6$, $F(s) = \dfrac{6}{(s-1)^2 + 3}$, $F(s) = \dfrac{2\sqrt{3}\sqrt{3}}{(s-1)^2 + (\sqrt{3})^2}$

Återtransformera: $f(t) = 2\sqrt{3}e^t \sin\sqrt{3}t$.

SVAR: Ekvationen har lösningen $f(t) = 2\sqrt{3}e^t \sin\sqrt{3}t$.

Del 2

11. Lösningar till differentialekvationen $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0 \quad , x > 0$ är på formen $y = x^a$, $a \in R$.
Bestäm a.
Vad menas med en bas för lösningsrummet till en linjär differentialekvationen?
Ange en bas för lösningsrummet till differentialekvationen $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0 \quad , x > 0$.
Ange även differentialekvationens allmänna lösning.

Lösning:

Insättning av $y = x^a$ i $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ ger $x^2a(a-1)x^{a-2} - 2xax^{a-1} + 2x^a = 0$.
Vi får $(a(a-1) - 2a + 2)x^a = 0$, $a(a-1) - 2(a-1) = 0$, $(a-2)(a-1) = 0$. $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.
Vi har två lösningar $a_1 = 1$ och $a_2 = 2$.
En bas för lösningsrummet till en linjär differentialekvationen av ordning n består av de n linjärt oberoende lösningarna till differentialekvationen.
En bas för lösningsrummet till differentialekvationen $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ ges av $\{x, \ x^2\}$.
Differentialekvationens allmänna lösning är en linjärkombination av baselementen.
Vi får $y = c_1x + c_2x^2$ där c_1 och c_2 är godtyckliga reella konstanter.

SVAR: Konstanterna är $a_1 = 1$ och $a_2 = 2$. En bas för lösningsrummet är $\{x, \ x^2\}$.
Den allmänna lösningen är $y = c_1x + c_2x^2$.

12. a) Ge en tolkning av systemet $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{g}(\mathbf{X})$ där $\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ och $\mathbf{g}$ är vektorvärd.

b) Bestäm de stationära lösningarna till systemet $\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 8 \\ x - y \end{pmatrix}$.

c) Bestäm de stationära lösningarnas typ och avgör stabilitet/instabilitet.

<u>Lösning:</u>

a) En tolkning är att systemet ger hastighetsvektorn $\dot{\mathbf{X}}$ i varje punkt där $\mathbf{g}$ är definierad.

b) De stationära lösningarna till systemet är där hastighetsvektorn är lika med nollvektorn.

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 8 \\ x - y \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} 2x^2 = 8 \\ x = y \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = y \end{cases}$$

De stationära lösningarna är $(2,2)$ och $(-2,-2)$.

c) För att undersöka de stationära lösningarnas karaktär användes linjarisering.

Vi bestämmer Jacobimatrisen i respektive kritisk punkt. Jacobimatrisen är $\mathbf{J}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Insättning ger $\mathbf{J}(2,2) = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}$ respektive $\mathbf{J}(-2,-2) = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{B}$.

Vi bestämmer matrisernas egenvärden.
Dessa fås ur ekvationerna $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ respektive $\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}) = 0$.
Vi får

<u>$(2,2)$</u> $\quad 0 = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 8 = (\lambda - \frac{3}{2})^2 - 8 - \frac{9}{4} = (\lambda - \frac{3}{2})^2 - \frac{41}{4}$, $\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{2}$.

Egenvärdena är reella och med skilda tecken. $(2,2)$ är sadelpunkt och därmed instabil.

<u>$(-2,-2)$</u> $\quad 0 = \begin{vmatrix} -4-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda + 8 = (\lambda + \frac{5}{2})^2 + 8 - \frac{25}{4} = (\lambda + \frac{5}{2})^2 + \frac{7}{4}$, $\lambda = \frac{-5 \pm i\sqrt{7}}{2}$.

Egenvärdena är komplexa och med negativ realdel. $(-2,-2)$ är en stabil spiral.

SVAR: a) Systemet kan representera ett hastighetsfält.
b) De stationära lösningarna är $(2,2)$ och $(-2,-2)$.
c) $(2,2)$ är sadelpunkt och därmed instabil. $(-2,-2)$ är en stabil spiral

13. a) $y = \frac{1}{x}$ är en lösning till differentialekvationen $y' + y^2 = 0$. Är $y = \frac{c}{x}$, $c \neq 0$, $c \neq 1$ en lösning?

b) Begynnelsevärdesproblemet $y' = y^2 + 4 \quad, y(0) = 1$ har en entydig lösning.
Motivera varför lösningen är entydig. Går lösningen genom punkten (2,-5) ?

c) Betrakta differentialekvationen $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, där f och $\frac{\partial f}{\partial y}$ är kontinuerliga i ett rektangulärt område R i xy-planet. Två skilda lösningskurvor kan skära varandra i en punkt, i området R.
Är påståendet sant eller falskt? Motivera!

<u>Lösning:</u>

a) Nej. ty med $y = \frac{c}{x}$, $c \neq 0$, $c \neq 1$ blir $y' + y^2$ lika med $y' + y^2 = -\frac{c}{x^2} + \frac{c^2}{x^2} = \frac{c^2 - c}{x^2}$
och $c^2 - c \neq 0$ då $c \neq 0$, $c \neq 1$

b) Med de kontinuerliga funktionerna $f(x,y) = y^2 + 4$ och $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$ har differentialekvationen en entydig lösning genom punkten (0,1) enligt entydighetssatsen.
En lösning genom punkten (0,1) kan ej gå genom punkten (2,-5) y är en växande funktion.

c) Påståendet är falskt, ty enligt entydighetssatsen existera en entydig lösning genom en punkt i området R.

SVAR: a) Nej, se ovan. b) Nej, se ovan. c) Falskt påstående.

14. a) Vad menas med att funktionerna f och g är ortogonala på intervallet $[a,b]$?
b) Visa att $\{\sin nx\}$, $n = 1,\ 2,\ 3$, utgör en mängd av ortogonala funktioner på intervallet $[0,\pi]$.
c) Skriv funktionen $f(x) = \sin^3 x$ på intervallet $[0,\pi]$ som en linjärkombination av lämpliga ortogonala funktioner i b)..
d) Antag att funktionen $f(x) = x^2 + 1$, $0 < x < 3$ är utvecklad i följande tre serier: en Fourierserie, en cosinusserie och en sinusserie. Ange det värde mot vilket respektive serie konvergerar för $x = 0$.

<u>Lösning:</u>

a) Två funktioner, f och g, är ortogonala på intervallet $[a,b]$ då $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$.

b) Vi visar att den inre produkten mellan två godtyckliga funktioner i den givna mängden är lika med noll på det givna intervallet.

$$\langle \sin nx,\ \sin mx\rangle = \int_0^\pi \sin nx \sin mx dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi (\cos(nx - mx) - \cos(nx + mx))dx = \{n \neq m\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n-m)x}{n-m} - \frac{\sin(n+m)x}{n+m}\right]_0^\pi = 0 .$$

c) Här gäller det att beskriva $f(x) = \sin^3 x$ med hjälp av den givna funktionsföljden.

En väg att göra detta är att ansätta $\sin^3 x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ och beräkna koefficienterna.

En betydligt kortare väg är att utnyttja formeln $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$.

d) Respektive serie kommer att konvergera mot $\frac{f(0+) + f(0-)}{2}$.

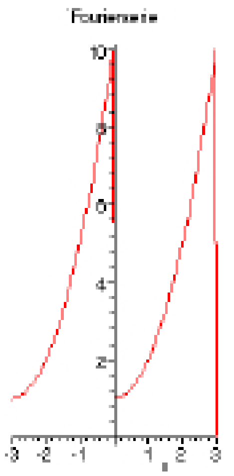
I fallet med Fourierserien blir detta: $\frac{0^2 + 1 + 3^2 + 1}{2} = \frac{11}{2}$.

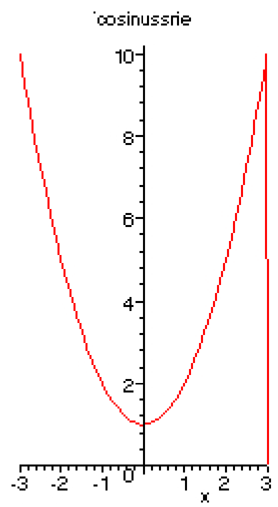
I fallet med cosinusserien blir detta: $\frac{0^2 + 1 + 0^2 + 1}{2} = 1$.

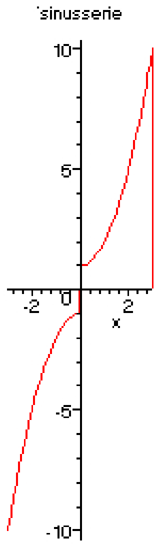
I fallet med sinusserien blir detta: $\frac{0^2 + 1 - (0^2 + 1)}{2} = 0$.

SVAR: a) Se ovan. b) $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$. c) $\frac{11}{2}$, 1 respektive 0.

Nedan följer plottar på de tre fallen.







SVAR: a) Se ovan. b) Se ovan. c) $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$. d) $\frac{11}{2}$, 1 respektive 0.

15. Det har ösregnat under en längre tid. Vatten har helt fyllt ett 100 m långt och 2 m brett dike. Dikets vertikala genomskärningsprofil har V-form, i form av en halv kvadrat, delad längs en horisontell diagonal, 2 m lång. Regnet har upphört vid tidpunkten $t = 0$.
a) Antag att diket nedtill är helt tätt så att vattnet endast kan försvinna genom avdunstning uppåt.
Låt $V(t)$ vara vattenvolymen vid tiden $t > 0$, med t mätt i dagar.
Visa att $V(t)$ uppfyller en differentialekvation på formen $\frac{dV}{dt} = -k\sqrt{V}$, $k =$positiv konstant,
om avdunstningshastigheten(i m^3/dag) är proportionell mot den fria vattenytans area.
b) Bestäm $V(t)$ om $V(0) = 100$ m^3 (=helt fyllt dike) och $V(1) = 99$ m^3.
c) När är diket torrlagt? ($\sqrt{99} \approx 9{,}95$).
<u>Lösning:</u>
a) Låt h vara vattenståndet i det triangulära diket. Då är tvärsnittets area $A = 2\ \frac{h^2}{2} = h^2$.

Vattenvolymen är: $V(t) = 100\ \ A = 100h^2,\ \ h = \frac{\sqrt{V}}{10}$. Den fria vattenytans area är $100\ \ 2h$.

Avdunstningshastigheten $\frac{dV}{dt} = -k_1 100\ \ 2h = -k_1 200\frac{\sqrt{V}}{10} = -k\sqrt{V}$. VSV

b) Differentialekvationen $\frac{dV}{dt} = -k\sqrt{V}$ är separabel. Den triviala lösningen saknar intresse.

För att få icke-triviala lösningar omformas differentialekvationen till: $\frac{1}{\sqrt{V}}\frac{dV}{dt} = -k$.

Integration ger: $2\sqrt{V} = -kt + C$. Villkoret $V(0) = 100$ ger $C = 20$.
Villkoret $V(1) = 99$ och $C = 20$ ger $2\sqrt{99} = -k + 20$, $k = 20 - 2\sqrt{99}$.
Insättning av konstanterna ger: $2\sqrt{V} = -(20 - 2\sqrt{99})t + 20$, $V = \left\{10 - (10 - \sqrt{99})t\right\}^2$.

c) Diket är tomt då $V = 0$ vilket inträffar för $t = \frac{10}{10 - \sqrt{99}} = \frac{10(10 + \sqrt{99})}{100 - 99} = 10(10 + \sqrt{99}) \approx 199{,}5$

SVAR: a) Se ovan. b) $V = \left\{10 - (10 - \sqrt{99})t\right\}^2$. c) Diket är torrlagt efter 199,5 dagar