**Tentamensskrivning i SF1633 Differentialekvationer I.**

Torsdagen den 31 maj 2012, kl 0800-1300.

Hjälpmedel: BETA, Mathematics Handbook.
Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa.
Svaren skall ges på reell form.

Del 1 är avsedd för betyg E och omfattar 3 uppgifter.
För betyg E krävs 3 godkända moduler.
För betyg FX krävs 2 godkända moduler.
Del 2 är avsedd för högre betyg, A, B, C och D, och omfattar totalt 20 poäng.
För betyg A krävs förutom 3 godkända moduler även 15 poäng på del 2.
För betyg B krävs förutom 3 godkända moduler även 11 poäng på del 2.
För betyg C krävs förutom 3 godkända moduler även 7 poäng på del 2.
För betyg D krävs förutom 3 godkända moduler även 3 poäng på del 2.
Uppgifterna 11-15 ger 4 poäng vardera.

<u>Del 1</u>

<u>Modul 1.</u>

En tank, på 300 liter, innehåller 100 liter vatten och 50 gram salt.
En saltlösning med 2 gram per liter pumpas in med hastigheten av 4 liter per sekund.
Den välblandade lösningen pumpas ut med en hastighet av 2 liter per sekund.
Bestäm när tanken är full samt ange saltmängden i tanken vid detta tillfälle.

<u>Modul 2.</u>

Betrakta det linjära systemet $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$, där $\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}$ och $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Den konstanta matrisen $\mathbf{A}$ uppfyller följande ekvationer: $\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{A}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Bestäm $\mathbf{X}(t)$ då $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

<u>Modul 3.</u>

Bestäm $f(t)$ då $f(t) = 2\int_0^t f(u)\cos 2(t-u)\,du + 3\sin 2t \quad , t \geq 0$.

vgv

Del 2

11. Lösningar till differentialekvationen $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0 \quad , x > 0$ är på formen $y = x^a, \ a \quad R$.
Bestäm $a$.
Vad menas med en bas för lösningsrummet till en linjär differentialekvationen?
Ange en bas för lösningsrummet till differentialekvationen $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0 \quad , x > 0$.
Ange även differentialekvationens allmänna lösning.

12. a) Ge en tolkning av systemet $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{g}(\mathbf{X})$ där $\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ och $\mathbf{g}$ är vektorvärd.

b) Bestäm de stationära lösningarna till systemet $\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 8 \\ x - y \end{pmatrix}$.

c) Bestäm de stationära lösningarnas typ och avgör stabilitet/instabilitet.

13. a) $y = \dfrac{1}{x}$ är en lösning till differentialekvationen $y' + y^2 = 0$. Är $y = \dfrac{c}{x}$ , $c \neq 0, \ c \neq 1$ en lösning?
b) Begynnelsevärdesproblemet $y' = y^2 + 4 \quad ,y(0) = 1$ har en entydig lösning.
Motivera varför lösningen är entydig. Går lösningen genom punkten (2,-5) ?
c) Betrakta differentialekvationen $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ , där $f$ och $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ är kontinuerliga i ett rektangulärt område R i xy-planet. Två skilda lösningskurvor kan skära varandra i en punkt, i området R.
Är påståendet sant eller falskt? Motivera!

14. a) Vad menas med att funktionerna $f$ och $g$ är ortogonala på intervallet $[a,b]$ ?
b) Visa att $\{\sin nx\}$ , $n = 1, \ 2, \ 3$, utgör en mängd av ortogonala funktioner på intervallet $[0,\pi]$.
c) Skriv funktionen $f(x) = \sin^3 x$ på intervallet $[0,\pi]$ som en linjärkombination av lämpliga ortogonala funktioner i b)..
d) Antag att funktionen $f(x) = x^2 + 1 \quad , \quad 0 < x < 3$ är utvecklad i följande tre serier: en Fourierserie, en cosinusserie och en sinusserie. Ange det värde mot vilket respektive serie konvergerar för $x = 0$.

15. Det har ösregnat under en längre tid. Vatten har helt fyllt ett 100 m långt och 2 m brett dike.
Dikets vertikala genomskärningsprofil har V-form, i form av en halv kvadrat, delad längs en horisontell diagonal, 2 m lång. Regnet har upphört vid tidpunkten $t = 0$.
a) Antag att diket nedtill är helt tätt så att vattnet endast kan försvinna genom avdunstning uppåt.
Låt $V(t)$ vara vattenvolymen vid tiden $t > 0$, med $t$ mätt i dagar.
Visa att $V(t)$ uppfyller en differentialekvation på formen $\dfrac{dV}{dt} = -k\sqrt{V}$ , $k =$positiv konstant,
om avdunstningshastigheten(i $m^3$/dag) är proportionell mot den fria vattenytans area.
b) Bestäm $V(t)$ om $V(0) = 100\,m^3$ (=helt fyllt dike) och $V(1) = 99\,m^3$.
c) När är diket torrlagt? ( $\sqrt{99} \approx 9{,}95$ ).